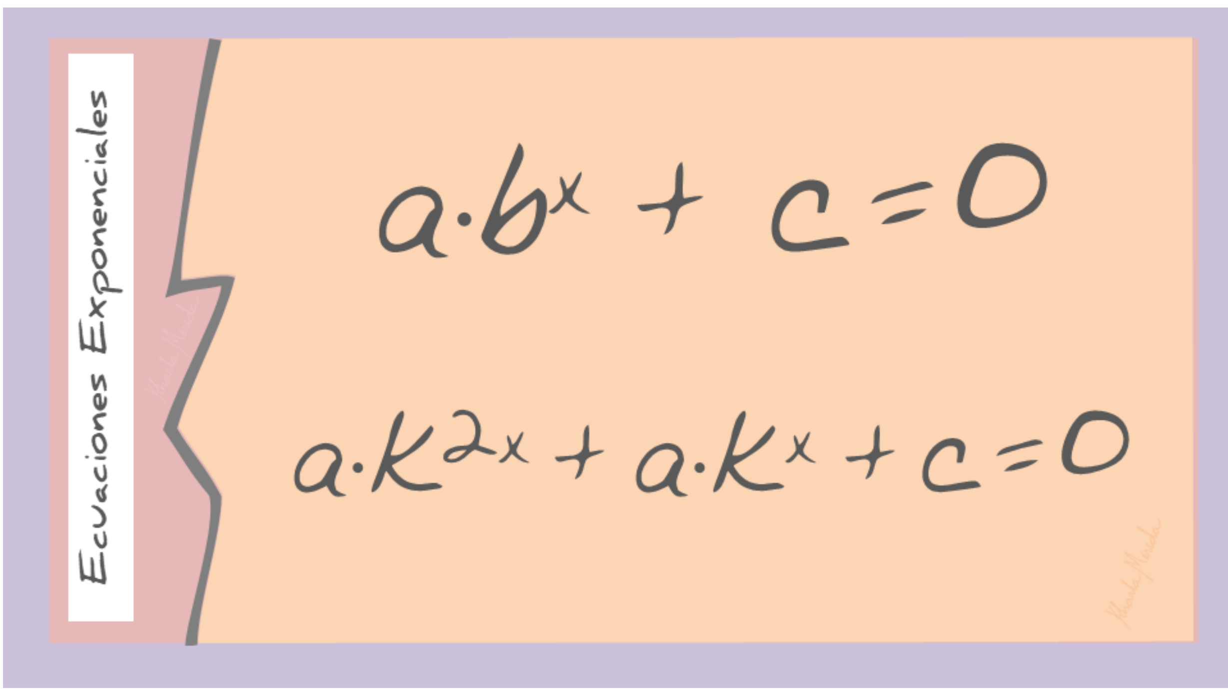
3
3ra Unidad

Exponenciales

3.2 Ecuaciones

Ser conscientes de todos los elementos que constituyen un conocimiento es ser conscientes de lo necesario para manejarlo con éxito.

Descripción



Hemos conocido ecuaciones desde su forma más simple, ecuaciones lineales, hasta ecuaciones de expresiones logarítmicas. A medida que avanzamos y agregamos formas matemáticas nuevas, vamos nutriendo los casos que aplican a las ecuaciones, que a su vez sirven para representar situaciones reales de los distintos ámbitos del acontecer humano. Aprendamos cómo resolver ecuaciones exponenciales.

Conocimientos Previos Requeridos

Operaciones y Propiedades de los Números Reales, Propiedades de las Potencias, Resolución de Ecuaciones, Ecuaciones Lineales y Ecuaciones de 2do Grado.

Contenido

Resolver Ecuaciones Exponenciales de 2do Grado.

Videos Disponibles

EXPONENCIALES. Resolver Ecuaciones Exponenciales

EXPONENCIALES. Resolver Ecuaciones Exponenciales de 2do Grado

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

Guiones Didácticos

EXPONENCIALES. Resolver Ecuaciones Exponenciales

Sabemos que **una ecuación es una igualdad con una o más incógnitas**, ahora bien, para que una ecuación sea exponencial, debe ocurrir que la incógnita esté en el exponente.

Ecuación Exponencial. es una ecuación de la forma $a \cdot b^{x} + c = 0$

Ejemplo

$$2^{x} = 4$$

Estudiaremos dos casos de ecuaciones exponenciales: Las ecuaciones exponenciales lineales, y ecuaciones exponenciales de 2do grado o cuadráticas.

Ecuaciones Exponenciales Lineales. Su forma general es

$$a \cdot b^{x} + c = 0$$

De Ellas se puede despejar la incógnita con facilidad, ya sea con propiedades de potencias o aplicando logaritmo.

Ecuaciones Exponenciales de 2do Grado. Su forma general es

$$a \cdot k^{2x} + b \cdot k^{x} + c = 0$$

En estas debemos aplicar cambio de variable para llevarlas a la forma general de una ecuación de 2do grado, y resolverlas como aprendimos en 3er año.

Las siguientes son ecuaciones exponenciales lineales.

$$7 \cdot 2^{x} + 3 = 0 \qquad 3 \cdot 5^{x} = 24 \qquad -e^{x} + 1 = 0$$

Cuando la ecuación puede llevarse a la forma $a^{cx} = a^{k}$, donde se tiene una igualdad de potencias de igual base, basta con igualar los exponentes y despejar la incógnita para resolver la ecuación.

$$a^{cx} = a^{k} \longrightarrow cx = k$$

Ejemplo

Hallar la solución de la ecuación: $3 \cdot 2^{x} = 48$

$$3 \cdot 2^x = 48$$

El 3 que multiplica a 2^x pasa dividiendo al 48

$$2^x = \frac{48}{3}$$

Efectuamos la división

$$2^x = 16$$

Sabemos que $16 = 2^4$

$$2^x = 2^4$$

Tenemos una igualdad de potencias con igual base para que la igualdad se cumpla, deben ser iguales los exponentes.

$$\boxed{x = 4}$$

También hay casos en los que la ecuación no puede llevarse a la forma de una igualdad de potencias de igual base entonces hay que aplicar logaritmo para poder despejar la incógnita.

Ejemplo

$$5 \cdot 3^x = 50$$

El 5 que multiplica a 3^x pasa dividiendo al 50

$$3^x = \frac{50}{5}$$

Efectuamos la división

$$3^x = 10$$

10 no puede ser escrito como potencia de base 3 de forma entera.

Aplicamos logaritmo en base 3 de ambos lados de la igualdad.

$$\log_3 3^x = \log_3 10$$

En el 1er lado de la igualdad, el argumento del logaritmo es una potencia,.

Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia.

$$x \log_3 3 = \log_3 10$$

Sabemos que: $\log_3 3 = 1$

$$x \cdot 1 = \log_3 10$$

$$\boxed{x = \log_3 10}$$

Debemos resolver una buena variedad de ejercicios para cubrir los diversos casos de ecuaciones lineales. Por ahora veamos cómo atender las ecuaciones exponenciales de 2do grado

EXPONENCIALES. Resolver Ecuaciones Exponenciales de 2do Grado

Una **ecuación exponencial de 2do grado** es aquella en la que se tiene un término con factor exponencial al cuadrado.

$$a \cdot k^{2x} + b \cdot k^{x} + c = 0$$

k^{2x} puede escribirse como $(k^x)^2$, por la propiedad potencia de potencia

$$a \cdot \left(k^{x}\right)^{2} + b \cdot \left(k^{x}\right) + c = 0$$

Aplicamos la sustitución $k^x \to y$

$$a \cdot y^{2} + by + c = 0$$

Ecuación de 2do Grado

Una vez que llegaos a una ecuación de 2do grado aplicamos la resolvente o fórmula para ecuaciones de 2do grado, aprendido en 3er lapso de matemática de 3er año.

Resolvente
Fórmula para resolver ecuaciones de 2do grado

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo

Hallar la solución de la ecuación exponencial de 2do grado $2 \cdot 3^{2x} + 3 \cdot 3^{x} - 2 = 0$

Escribimos 3^{2x} como $(3^x)^2$, por la propiedad potencia de potencia

$$2 \cdot \left(3^{x}\right)^{2} + 3 \cdot \left(3^{x}\right) - 2 = 0$$

Aplicamos la sustitución $3^x \to y$

$$2 \cdot y^{2} + 3 \cdot y - 2 = 0$$

Aplicamos la Resolvente, con: $a = 2$, $b = 3$ y $c = -2$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{3^{2} - 4 \cdot 2(-2)}}{2 \cdot 2}$$

Efectuamos los productos y potencias

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$y = \frac{-3 \pm 5}{4} \qquad y_1 = \frac{1}{2} \qquad y_2 = -2$$

Devolvemos la sustitución $y \to 3^x$

$$3^{x_1} = \frac{1}{2} \qquad 3^{x_2} = -2$$

Aplicamos logaritmo en base 3 de ambos lados de la igualdad, en ambas igualdades.

$$\log_3 3^{x_1} = \log_3 \frac{1}{2} \qquad \cancel{\log_3 3^{x_1} = \log_3(-2)}$$

el argumento de un logaritmo debe ser positivo

Aplicamos logaritmo de una potencia para bajar x_1

$$x_1 \cdot \log_3 3 = \log_3 \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x_1 = \log_3 \frac{1}{2}} \quad \text{o} \quad \boxed{x_1 = -\log_3 2}$$

A Practicar

Hallar la solución o soluciones en cada caso:

1. $10^{3x} = 125 \cdot 2^{3x}$
2. $6 \cdot 2^{-x} = 3 \cdot 2^{x}$
3. $4 \cdot 5^{-x} = 60$
4. $8^{-x} = 13 \cdot 5^{-x}$
5. $14^{4-x} = 7^{-x+3}$
6. $3^{x+1} + 3^{x} = 24$
7. $9 \cdot 2^{x+4} - 5 \cdot 2^{x+3} = 208$
8. $7^{2x} + 2 \cdot 7^{x} - 15 = 0$
9. $5^{x} - 2 \cdot 5^{-x} - 1 = 0$
10. $9^{x} - 2 \cdot 3^{x+1} + 8 = 0$
11. $2^{x} - \dfrac{1}{2^{x-2}} = 5$
12. $5^{x-1} = 2 + \dfrac{3}{5^{x-2}}$

¿Lo Hicimos Bien?

1. $x = 1$
2. $x = \dfrac{1}{2}$
3. $x = \log_5 \dfrac{1}{15}$
4. $x = -\log_{5/8} 13$
5. $x = \log_2 112$
6. $x = \log_3 6$
7. $x = 1$
8. $x = \log_7 3$
9. $x = \log_5 2$
10. $x = \log_3 2$, $x = \log_3 6$
11. $x = 2$, $x = 0$
12. $x = 2$