1

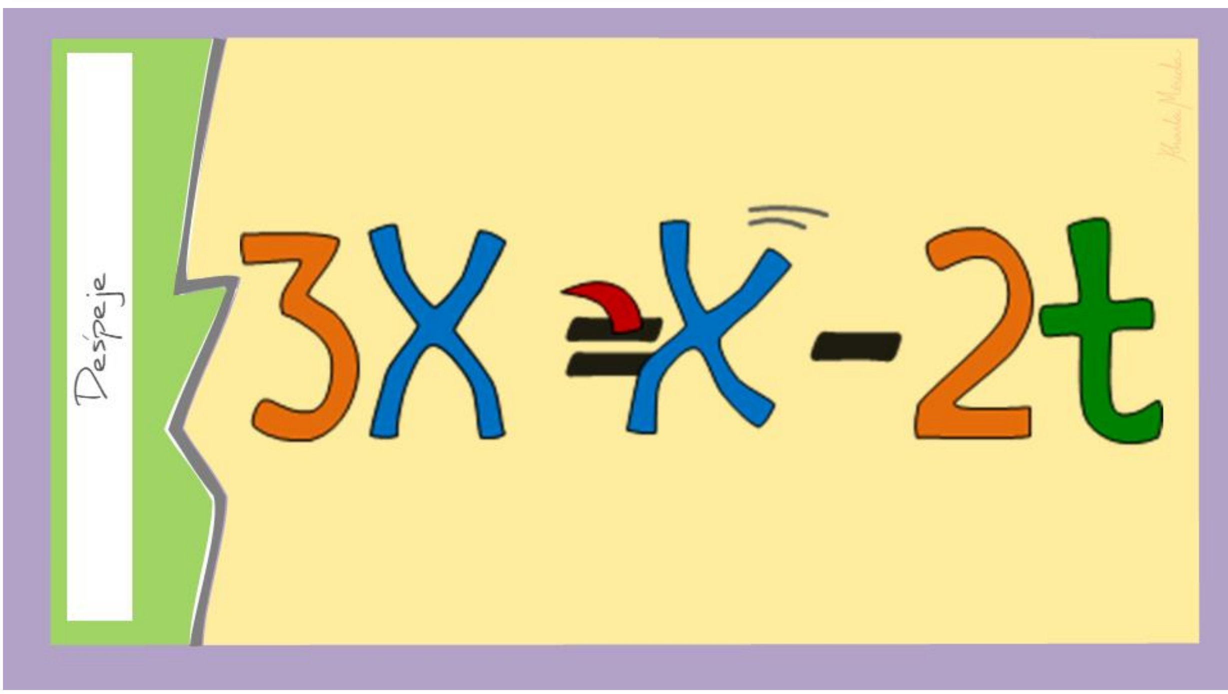
1ra Unidad

Introducción

1.3 Despeje

En ocasiones debemos despejar el panorama que tenemos ante nosotros para ver las cosas mas claras. Ser capaces de Ver los árboles y ver el bosque es una cualidad de gran valor para lograr grandes metas.

Descripción



Despejar una mesa, una sala, el término "Despejar" es parte de nuestra cotidianidad. Algebraicamente tiene un significado similar.

"Despejar a" es "Dejar sólo(a) a", y es algo que debemos hacer cada vez que se halla el valor de alguna incógnita.

"Lo que está positivo pasa negativo al otro lado", "Lo que está negativo pasa positivo al otro lado", son frases muy frecuentes cuando se trata de despejar. Pero lo que hace de ellas un recurso simpático para recordar, las hace también peligrosas cuando se trata de despejar sin conocer las propiedades que lo sustentan.

Sin embargo, no hay razón para preocuparse, contamos con frases igual de amigables correspondientes a reglas infalibles, reglas que no dan lugar a dudas o confusiones en la ejecución de los despejes. Acompáñanos para aprender a despejar con facilidad.

Conocimientos Previos Requeridos

Operaciones y Propiedades de los Números Reales, Ecuaciones.

Contenido

Despeje, Reglas De Despeje, Deducción de las Reglas de Despeje.

Videos Disponibles

DESPEJE. Conceptos Fundamentales. Incógnita, Ecuación, Reglas de Despeje

DESPEJE. Ejercicios 1, 2 y 3

DESPEJE. Ejercicios 4 y 5

DESPEJE. Ejercicios 6 y 7

DESPEJE. Deducción de las Reglas de Despejes. Parte I

DESPEJE. Deducción de las Reglas de Despejes. Parte II

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para familiarizarse con los conceptos nuevos y fortalecer el Lenguaje Físico.

En el estudio de Ecuaciones (ver: **Matemática 1er año**, **Ecuaciones**) aprendimos conceptos necesarios para el manejo y resolución de éstas. En física, veremos y trabajaremos cotidianamente con igualdades denominadas **Fórmulas**, en las hay más de una incógnita. Despejar incógnitas es el equivalente en física de resolver una ecuación en matemática, y es una de las tareas más frecuentes y necesarias para la resolución de problemas y cálculo de valores de magnitudes físicas.

Veamos entonces en qué consiste despejar.

DESPEJE. Conceptos Fundamentales. Incógnita, Ecuación, Reglas de Despeje

Despeje. Es un proceso sistemático cuyo objetivo es dejar una **variable** o **incógnita** sola en el primer lado de la ecuación o igualdad.

Ejemplo

Cuáles de las 6 ecuaciones tienen una incógnita despejada.

$A = \pi \cdot r^2$	$3xy - 2z = 9$	$T - m \cdot a = 4$
$4x + 7y = -1$	$V_f = V_0 + g \cdot t$	$h = V_{oy}t - \frac{gt^2}{2}$

1ra. Tiene dos incógnitas, A y r. Pi (π) es un valor conocido.

Recordemos que se trata de una constante muy utilizada en geometría y cuyo valor es 3,14159…, y siguen los decimales.

A se encuentra solita en el primer lado de la igualdad, entonces **A está despejada**.

$$A = \pi \cdot r^2$$

$$A = \pi \cdot r^2$$

2da. Tiene dos incógnitas, x y y.

Ninguna de ellas está sola en el primer lado de la igualdad, por tanto **esta ecuación no está despejada**.

$$4x + 7y = -1$$

3ra. Tiene tres incógnitas, x, y, z.

Ninguna de ellas está sola en el primer lado de la igualdad, por tanto **esta ecuación no está despejada**.

$$3xy - 2z = 9$$

4ta. Tiene tres incógnitas, V_f, V_o, t. La letra g en física representa la gravedad, una constante cuyo valor es 9,8 m/s^2.

En este caso V_f está solita en el primer lado de la igualdad, en esta ecuación $\boldsymbol{V_f}$ **está despejada**.

$$V_f = V_0 + g \cdot t$$

$$V_f = V_0 + g \cdot t$$

5ta. Tiene tres incógnitas, T, m, a.

Ninguna de ellas está sola en el primer lado de la igualdad, por tanto **esta ecuación no está despejada**.

$$T - m \cdot a = 4$$

6ta. Tiene tres incógnitas, h, V_{oy}, t.

h se encuentra solita en el primer lado de la igualdad, entonces ***h*** **está despejada**.

$$h = V_{oy} \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

$$h = V_{oy} \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Los conceptos de **términos** y **factores** los has visto en matemática de 1ro y 2do año, en caso de dudas puedes consultar esas secciones.

La regla fundamental de despeje, que resume las propiedades y leyes matemáticas que la sustentan, en términos sencillos dice:

Regla: Toda cantidad que se pasa de un lado a otro de la igualdad, debe pasar realizando la operación contraria.

Entiéndase bien, **pasa con la operación contraria, no con el signo contrario**.

Nota: Decir «*pasa con el signo contrario*» puede traernos inconvenientes cuando no dominamos los fundamentos teóricos. Veamos a qué nos referimos.

Ejemplo

Sea la igualdad $-3x = 6$

Es común ver que se pase dividiendo al 3, con signo positivo al otro lado, desapareciendo el signo menos. Por la idea equivocada de:

«***pasa al otro lado con el signo contrario***»

$$-3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3}$$ **Error Común**

Para evitar cometer equivocaciones podemos hacernos tres preguntas cuando debamos mover un término, o factor, de un lado a otro de la igualdad. Veamos:

1ra. ¿Quién está acompañando a la x?

R: el -3

$$-3x = 6$$

2da. ¿Qué operación está efectuando -3 con la x?

R: -3 está multiplicando a la x.

$$-3 \cdot x$$

Recordemos: si entre un número y una letra no hay ningún signo de operación se sobre entiende que se trata de una multiplicación.

3ra. ¿Con qué operación pasa al otro lado de la igualdad?

R: -3 pasa dividiendo al otro lado de la igualdad.

$$x = \frac{6}{-3}$$

Nota: El número o cantidad que esté multiplicando (con signo y todo) pasa al otro lado dividiendo.

A continuación presentamos la relación de operaciones contrarias entre sí.

	Operación Directa		Operación Contraria	
Suma	$a + b$	$\longrightarrow$	$a - b$	**Resta**
Resta	$a - b$	$\longrightarrow$	$a + b$	**Suma**
Multiplicación	$a \cdot b$	$\longrightarrow$	$\frac{a}{b}$	**División**
División	$\frac{a}{b}$	$\longrightarrow$	$a \cdot b$	**Multiplicación**

	Operación Directa		**Operación Contraria**	
Potencia	a^n	$\longrightarrow$	$\sqrt[n]{a}$	**Radicación**
Radicación	$\sqrt[n]{a}$	$\longrightarrow$	a^n	**Multiplicación**

Veamos la aplicación de la Regla "*pasa al otro lado con la operación contraria*" para cada operación.

Recordemos: Para despejar x debemos dejarla sola en el 1er lado de la igualdad.

Para La Suma

El 3 está sumando a la x, pasa al otro lado restando.

$$x + 3 = 6$$
$$x = 6 - 3$$

Para La Resta

El 3 está restando a la x, pasa al otro lado sumando.

$$x - 3 = 6$$
$$x = 6 + 3$$

Para La Multiplicación

El 3 está multiplicando a la x, pasa al otro lado dividiendo.

$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3}$$

Para La División

El 3 está dividiendo a la x, pasa al otro lado multiplicando.

$$\frac{x}{3} = 6$$
$$x = 6 \cdot 3$$

Para La Potenciación

El 2 está elevando a la x, pasa al otro lado en forma de raíz cuadrada.

$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$

Nota: Cuando se trata de pasar una potencia de exponente Par como raíz, debemos considerar dos signos. Puedes verificar el porqué en **Ecuaciones de 2do grado**.

Para La Radicación

El 2 está como índice de la raíz en la que está x, pasa al otro lado elevando al cuadrado.

$$\sqrt{x} = 3$$
$$x = 3^2$$

Regla Fundamental de Despeje

Toda cantidad que se pasa de un lado a otro de la igualdad, debe pasar realizando la operación contraria.

Propiedad Simétrica de la Igualdad

En toda igualdad, si A = B entonces B = A

DESPEJE. Ejercicios 1, 2 y 3

Ejercicio 1. Despejar b de la siguiente ecuación.

$A = b \cdot (c - t)$ *b es la incógnita a despejar*

1ra. ¿Quién está acompañando a la **b**?

R: el paréntesis $(c - t)$

$$A = b \cdot (c - t)$$

2da. ¿Qué operación está efectuando con la **b**?

R: $(c - t)$ está multiplicando a **b**.

3ra. ¿Con qué operación pasa $(c - t)$ al otro lado de la igualdad?

R: $(c - t)$ pasa dividiendo al otro lado de la igualdad.

$$\frac{A}{(c - t)} = b$$

Para terminar de despejar a **b** debemos dejarla sola en el 1er lado de la igualdad.

Aplicamos la Propiedad Simétrica

$A = B \rightarrow B = A$

$$\boxed{b = \frac{A}{(c - t)}}$$

Despejada **b**

Ejercicio 2. Despejar c de la siguiente ecuación.

$$A = b \cdot (c - t)$$

Para despejar a **c** debemos quitar todo lo que le acompaña y pasarlo al otro lado.

Nota: Para despejar una incógnita que tenga muchas cantidades acompañándola, empezamos con la más alejada de ella.

1ra. ¿Quién está más alejada de la **c**?

R: **b** está más alejada de **c**, fuera del paréntesis.

$$A = b \cdot (c - t)$$

2da. ¿Qué operación está efectuando **b**?

R: **b** está multiplicando.

3ra. ¿Con qué operación pasa **b** al otro lado de la igualdad?

R: **b** pasa dividiendo al otro lado de la igualdad.

$$\frac{A}{b} = (c - t)$$

Ahora, ¿Quién acompaña a **c**?

R: **t** acompaña a **c**.

$$\frac{A}{b} = c - t$$

¿Qué operación está efectuando **t**?

R: **t** está restando a **c**.

¿Con qué operación pasa **t** al otro lado de la igualdad?

R: **t** pasa sumando al otro lado de la igualdad.

$$\frac{A}{b} + t = c$$

Para terminar de despejar a b debemos dejarla sola en el 1er lado de la igualdad.

Aplicamos la Propiedad Simétrica

$A = B \;\rightarrow\; B = A$

$$\frac{A}{b} + t = c \longrightarrow \boxed{c = \frac{A}{b} + t}$$

Despejada c

Ejercicio 3. Despejar t de la siguiente ecuación.

$$A = b \cdot (c - t)$$

Para este caso aprovecharemos el análisis y trabajo hecho en el anterior (despejando c).

Partiremos de: $\dfrac{A}{b} + t = c$

Ahora, ¿Quién acompaña a t?

R: la fracción **A/b** acompaña a t.

$$\frac{A}{b} + t = c$$

¿Qué operación está efectuando la fracción **A/b**?

R: **A/b** está sumando a t.

¿Con qué operación pasa **A/b** al otro lado de la igualdad?

R: **A/b** pasa restando al otro lado de la igualdad.

$$\boxed{t = c - \frac{A}{b}}$$

Despejada t

DESPEJE. Ejercicios 4 y 5

Ejercicio 4. Despejar V_o y a de la siguiente ecuación

$$V^2 = V_o^2 - 2ad$$

Para despejar a V_o debemos dejarla sola en el primer lado de la igualdad.

1ro. El término **2ad** está restando en el segundo lado de la igualdad. Entonces **2ad** pasa sumando al primer lado de la igualdad.

$$V^2 = V_o^2 - 2ad$$

$$V^2 + 2ad = V_o^2$$

2do. V_o está en el segundo lado de la igualdad.

Recordemos que para estar despejado debe estar en el primer lado de la igualdad.

Aplicamos **Propiedad Simétrica de la Igualdad** para cambiar la ubicación de V_o.

$A = B \;\rightarrow\; B = A$

$$V_o^2 = V^2 + 2ad$$

3ro. V_o está elevado al cuadrado.

El exponente de una potencia, pasa como raíz al otro lado de la igualdad. Ver Regla de Despeje Para la Potencia

$$V_o = \pm\sqrt{V^2 + 2ad}$$

Ejercicio 5. Despejar a de la ecuación

$$V^2 = V_o^2 - 2ad$$

Para despejar ***a*** debemos dejarla sola en el primer lado de la igualdad.

a está como factor, en el segundo término del segundo lado de la igualdad.

$$V^2 = V_o^2 - 2ad$$

Trasladaremos el término **2ad**, que está restando, sumando al primer lado de la igualdad.

$$V^2 + 2ad = V_o^2$$

V² está sumando al término que contiene **2ad**.

$$V^2 + 2ad = V_o^2$$

Pasamos **V²** restando al segundo lado.

$$2ad = V_o^2 - V^2$$

Acompañando a **a** están los factores **2** y **d**.

$$2ad = V_o^2 - V^2$$

Los factores **2** y **d** que multiplican a **a**, pasan al segundo lado de la igualdad dividiendo.

$$a = \frac{V_o^2 - V^2}{2d}$$

Despejada ***a***

$$\boxed{a = \frac{V_o^2 - V^2}{2d}}$$

DESPEJE. Ejercicio 6 y 7

Despejar d de la siguiente ecuación

$$V^2 = V_o^2 - 2ad$$

Despejando d

Para despejar **d** , debemos dejarla sola en el primer lado de la igualdad.

Pasaremos el término a ***2ad*** que esta restando, al primer lado de la igualdad sumando

$$V^2 = V_o^2 - 2ad$$

V² está sumando al término que contiene ***2ad***.

$$V^2 + 2ad = V_o^2$$

Pasamos **V²** restando al segundo lado.

$$V^2 + 2ad = V_o^2$$

Acompañando a **d** están los factores **2** y **a**.

$$2ad = V_o^2 - V^2$$

Los factores **2** y **d** que multiplican a **d**, pasan al segundo lado de la igualdad dividiendo.

$$2ad = V_o^2 - V^2$$

$$d = \frac{V_o^2 - V^2}{2a}$$

Despejada ***d***

$$\boxed{d = \frac{V_o^2 - V^2}{2a}}$$

DESPEJE. Deducción de las Reglas de Despejes. Parte I

Este video surge como una manera de aclarar, la diversidad de criterios que encontraras, cuando se trata de realizar los despejes esperamos sea suficiente para dejar totalmente claras, las reglas que has visto presentadas en este espacio virtual.

Despeje **Despeje**
Despeje **Despeje** **Despeje**
Despeje **Despeje**
Despeje **Despeje**

A continuación, veras los errores más frecuentes, y la versión correcta justificas con las propiedades o leyes matemáticas correspondientes

Si nos piden hallar x en una expresión como: $3x + y = 4 - y$

Error Común: decir "***despeja y***" para referirse a pasar ***y*** de un lado a otro.

$$3x + y = 4 - y$$

Utilizamos la palabra "despejar", como sinónimo de mover una cantidad de un lado a otro de la igualdad.

Lo Correcto: decir "***despeja x***" para referirse a dejar la incógnita sola en el primer lado de la igualdad.

$$3x + y = 4 - y$$

Utilizar la palabra "***despejar***", como sinónimo de dejar sola la incógnita, **x**, en el primer lado de la igualdad.

Así que en lo sucesivo, debemos cuidar la manera en que nos referimos a una operación si lo que vamos hacer es ***transponer,*** mover una cantidad de un lado a otro de la igualdad, diremos: pasamos tal cantidad al otro lado, ya sea sumando, restando, multiplicando o dividiendo, según sea el caso.

Otra impropiedad que ha pasado de generación en generación, a la hora de explicar despeje, es decir, lo que esta en positivo pasa negativo y lo que esta negativo pasa a positivo.

Error Común: decir "***lo que está positivo pasa negativo y lo que está negativo pasa positivo***".

Positivo $\xrightarrow{=}$ **Negativo**
Negativo $\xrightarrow{=}$ **Positivo**

Esta expresión ha generado gran cantidad de errores operativos en miles de estudiantes, por no hacer justicia a las leyes matemáticas que sustentan la ***transposición*** de términos y factores.

El origen de las transposiciones o pasos de cantidades de un lado a otro de la igualdad, vienen de leyes y propiedades matemáticas. Veamos cuáles y cómo aplican.

Propiedad de la Igualdad:
Sean ***a***, ***b*** y ***c*** pertenecientes a los Reales.
Se cumple que:

$$\text{Si } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \text{ entonces } \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$

En términos sencillos: "si sumamos a ambos lados de una igualdad la misma cantidad, no se altera la igualdad". (ver más en:)

Elemento Neutro de la Suma:
Para todo ***a*** perteneciente a los Reales, existe un ***elemento neutro***, **0**, perteneciente a los Reales, tal que, ***a*** más ***0*** es igual a ***a***.

$$\forall\, a \in R\ \exists\ 0 \in R \,/\, a + 0 = 0 + a = a$$

En términos sencillos: "´sumar cero a cualquier cantidad no altera su valor".
(ver más en:)

Elemento Simétrico de la Suma:
Para todo ***a*** perteneciente a los Reales, existe un ***opuesto de a***, **-a**, también perteneciente a los Reales, tal que, ***a*** más ***su opuesto*** es igual al ***elemento neutro***, **0**.

$$\forall\, a \in R\ \exists\ -a \in R \,/\, a + (-a) = 0$$

Nota: A lo largo de los años se ha desvanecido la costumbre de cuidar el lenguaje matemático, y se ha aceptado "deletrear la expresión matemática" diciendo "menos a" en lugar de llamarla por su denominación "opuesto de a".

Una aplicación práctica de estas propiedades en la transposición de términos es la que da origen a "lo que está sumando pasa restando".

Ejemplo

Despejemos x en la expresión **x + 7 = 3**

La incógnita es **x**.	$x + 7 = 3$
Sumamos el **-7** a ambos lados de la igualdad. Aplicando **Propiedad de la Igualdad en los Reales**.	$x + 7 + (-7) = 3 + (-7)$
La **suma de opuestos** es cero: $7 + (-7) = 0$	$x + 0 = 3 + (-7)$
Elemento Neutro de la Suma: $x + 0 = x$	$x = 3 + (-7)$
Transformamos la suma en una resta cambiando **-7** por su opuesto: $3 + (-7) = 3 - 7$	$x = 3 - 7$

Nota

Inicialmente el **7** esta sumando en el 1er lado de la igualdad: $x + 7 = 3$

Al final el **7** está restando en el 2do lado de la igualdad: $x = 3 - 7$

Esto generó la idea equivocada de que "lo que está positivo pasa negativo y lo que está negativo pasa positivo".

Lo que sucede en realidad es que **se pasa de un lado a otro con la operación contraria**.

DESPEJE. Deducción de las Reglas de Despejes. Parte II

Nota: estas aclaratorias matemáticas, están hechas con la mínima formalidad necesaria para hacer una justificación veraz, pero sin la carga de abstracción y formalidad propia del lenguaje matemático demostrativo.

Despeje
Leyes Matemáticas
Propiedad Asociativa
Propiedad Conmutativa
Elemento Neutro de la Suma
Elemento Simétrico de la Suma
Propiedad Simétrica de la Igualdad
Elemento Neutro de la Multiplicación
Elemento Simétrico de la Multiplicación

Elemento Neutro de la Multiplicación:

Para todo ***a*** perteneciente a los Reales, existe un ***elemento neutro***, **1**, perteneciente a los Reales, tal que, ***a*** por ***1*** es igual a ***a***.

$$\forall\, a \in R\ \exists\ 1 \in R \,/\, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Elemento Simétrico de la Multiplicación (Inverso Multiplicativo):

Para todo ***a*** perteneciente a los Reales sin el cero, existe un ***inverso de a***, a^{-1}, también perteneciente a los Reales sin el cero, tal que, ***a*** por ***su inverso*** es igual al ***elemento neutro***, **1**.

$$\forall\, a \in R^{*}\ \exists\ a^{-1} \in R^{*} \,/\, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

Nota: Se lee ***inverso de a***, no ***a*** a la menos uno.

Una aplicación práctica de estas propiedades en el despeje da origen a la frase "lo que está multiplicando pasa dividiendo".

Ejemplo

Despejemos x en la expresión $-5x = 10$

La incógnita es **x**. $\quad -5x = -10$

Multiplicamos $(-5)^{-1}$ a ambos lados de la igualdad. $\quad (-5)^{-1} \cdot (-5x) = (-5)^{-1} \cdot 10$

Multiplicamos $(-5)^{-1}$ a ambos lados de la igualdad. $\quad (-5)^{-1} \cdot (-5)x = (-5)^{-1} \cdot 10$

Inverso Multiplicativo: $(-5)^{-1} \cdot (-5) = 1$ $\quad 1 \cdot x = (-5)^{-1} \cdot 10$

Elemento Neutro de la Multiplicación: $1 \cdot x = x$ $\quad x = (-5)^{-1} \cdot 10$

Potencia con exponente negativo: $(-5)^{-1} = \frac{1}{-5}$ $\quad x = \frac{1}{-5} \cdot 10$

Nota: Observemos las ecuaciones inicial y final del proceso:

El **-5** esta multiplicando en el 1er lado de la igualdad.

El **-5** esta dividiendo en el 2do lado de la igualdad.

$$-5x = -10$$
$$x = \frac{1}{-5} \cdot 10$$

Esto comprueba que el signo de una cantidad no cambia al pasar de una lado a otro. Lo que sucede en realidad es que **se pasa de un lado a otro con la operación contraria**.

Conclusión

Cuando despejamos:

Lo que esta sumando pasa restando,

Lo que esta restando pasa sumando.

Transponiendo Términos

$x + 5 = 10 \longrightarrow x = 10 - 5$

$x - 6 = 2 \longrightarrow x = 2 + 6$

Cuando despejamos:

Lo que esta multiplicando pasa dividiendo

Lo que esta dividiendo pasa multiplicando,

Transponiendo Factores

$5x = 10 \longrightarrow x = \frac{10}{5}$

$\frac{x}{3} = 2 \longrightarrow x = 3 \cdot 2$

Toda cantidad que pase de un lado a otro lado de la igualdad, debe pasar bajo la operación contraria.

Emparejando el Lenguaje

Despeje. Es un proceso sistemático cuyo objetivo es dejar una variable o incógnita sola de un lado de una ecuación o igualdad.

Incógnita. Es un sistema de unidades en el cual sus cantidades fundamentales, Longitud, Fuerza y Tiempo, están en Metros, Kilogramofuerza o Kilopondio y Segundos, respectivamente

Términos. Son cantidades para las que se necesita indicar dirección y sentido, además de la medida.

A Practicar

En cada caso despejar las incógnitas indicadas:

1. $3T - 5ma = 2mg$ Despejar: T, a, m
2. $a = 4xy - b^2$ Despejar: x, b
3. $k(x - a) = g(x - b)$ Despejar: x
4. $x = 2ab + ct^2 + 2at^2$ Despejar: t

Lo Hicimos Bien?

1. $3T = 2mg + 5ma$, $a = \dfrac{3T - 2mg}{5a}$, $m = \dfrac{3T}{(5a + 2g)}$
2. $x = \dfrac{a + b^2}{4y}$, $b = \sqrt{4xy - a}$
3. $m = \dfrac{a - b}{k - g}$
4. $t = \sqrt{\dfrac{x - 2ab}{c + 2a}}$