2

2da Unidad

Logaritmo

2.1 Definición y Elementos

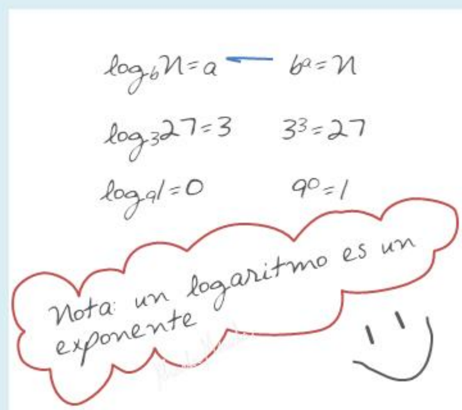
Todo lo complejo está compuesto de partes simples. Reordenar en nuestra mente la visión de esas partes hasta encontrar un diseño accesible es lo que nos caracteriza como seres humanos.

Descripción

Logaritmo

John Napier

Henry Briggs



"Los logaritmos son números, que se descubrieron para facilitar la solución de los problemas aritméticos y geométricos, a través de esto se evitan todas las complejas multiplicaciones y divisiones transformándolo a algo completamente simple a través de la substitución de la multiplicación por la adición y la división por la sustracción. Además el calculo de las raíces se realiza también con gran facilidad."

Herry Briggs (1556-1631)

Conocimientos Previos Requeridos

Operaciones y Propiedades de los Números Reales, Propiedades de las Potencias, Despeje.

Contenido

Definición y Elementos de Logaritmo, Propiedades de Logaritmo, Definición y Propiedades, Ecuaciones Logarítmicas, Funciones Logarítmicas, Ejercicios

Videos Disponibles

LOGARITMO. Definición. Elementos de un Logaritmo

LOGARITMO. Logaritmos Notables. Por su Base

LOGARITMO. Logaritmos Notables. Por su Valor

LOGARITMO. Definición de Logaritmo. Calcular el Valor de X. Ejercicio 1

LOGARITMO. Definición de Logaritmo. Calcular el Valor de X. Ejercicio 2

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones. Poner al día esta información básica amerita por lo menos 2 encuentros, de manera que puedan desarrollarse prácticas guiadas con oportunidad de intercambiar y aclarar dudas.

Guiones Didácticos

LOGARITMO. Definición. Elemento de un Logaritmo

Cuando estudiamos los números irracionales y los reales aprendimos cómo hallar el valor de x, cuando x es la base de una potencia en una ecuación.

Sabemos que esto es una ecuación cuadrática en la que para hallar el valor de x, despejamos aplicando raíz cuadrada del otro lado de la igualdad

Ecuación cuadrática

$$x^2 = 4$$

Para hallar la solución

$$x = \pm\sqrt{4}$$

¿Qué sucede si ahora tenemos una ecuación de la forma $2^x = 32$**?**

Hay un operador cuya definición nos permite trabajar con relaciones de este tipo, veamos.

Vamos a construir una estructura matemática de la siguiente forma

Está constituida por 4 elementos o partes, con posiciones específicas determinadas por las casillas de colores representadas a la derecha.

$$\text{Log}_b\, N = a$$

Esta expresión matemática se lee:

Logaritmo en base *b* de *N* igual a *a*.

Log: es el símbolo del logaritmo
b: es la base del logaritmo
N: es el argumento del logaritmo
a: es el valor del logaritmo

La definición del logaritmo dice así:

a* es el exponente al que se debe elevar a *b* para que resulte *N

Logaritmo. Sea la igualdad $Log_b N = a$.
El logaritmo es el valor, ***a***, al que hay elevar la base, ***b***, para que resulte el argumento, ***N***.

$$b^a = N$$

Nota: Hay condiciones que deben cumplir algunos de sus elementos

Condiciones o Restricciones Para Cada Elemento del Logaritmo

b, base del logaritmo. debe ser un valor entre cero y uno, o mayor que uno. $0 < b < 1 \;,\quad b > 1$

N, argumento del logaritmo. debe ser un valor mayor que cero esto es, positivo, $N > 0$

Ejemplos

$Log_2 8 = 3$
Logaritmo en base 2 de 8 es 3

¿Por qué? $2^3 = 8$ Porque 3 es el exponente que eleva a 2 para que dé 8

$Log_5 25 = 2$
Logaritmo en base 5 de 25 es 2

¿Por qué? $5^2 = 25$ Porque 2 es el exponente que eleva a 5 para que dé 25

LOGARITMO. Logaritmos Notables. Por su Base

En la lección 1 vimos La definición de logaritmo, sus elementos y las condiciones que éstos deben cumplir. Ahora conoceremos los tipos de logaritmos, de acuerdo a su base y de acuerdo a su valor.

Logaritmos Notables según su Base

Logaritmo base e, también llamado **logaritmo natural**, o **logaritmo neperiano**. Nombre que se debe al matemático John Napier, quien dedicó 20 años de su vida a obtener el valor de exponenciales trigonométricas, muy necesarias en cálculos astronómicos y a simplificar estos cálculos.

A estos valores obtenidos de relaciones exponenciales los denominó logaritmos, que quiere decir «números proporcionados».

John Napier
1550-1617

Logaritmo Neperiano

Es el logaritmo de base *e*: $\log_e K$

Nota: El **logaritmo neperiano**, o simplemente **neperiano** se simboliza con ***Ln***, sin indicar la base e, pues con esta expresión abreviada ya se expresa que es de base **e**.

e es un número irracional de valor 2,7182818284…

$\log_e K \longrightarrow \text{Ln}K$

e = 2,7182818284…

Logaritmo base *10*, también llamado **logaritmo vulgar**, o **logaritmo de Briggs**. Nombre que se debe al matemático Henry Briggs, admirador de John Napier, y quien logró que éste asumiera el cambio en los logaritmos para hacer del logaritmo base 10 el logaritmo básico.

Henry Briggs
1561-1630

Logaritmo de Briggs

Es el logaritmo de base *10*: $\log_{10} K$

Nota: Cuando la base del logaritmo es 10, la base queda sobreentendida. Y se lee "logaritmo de…" sin mencionar la base.

$\log_{10} K \longrightarrow \log K$

Es decir, toda vez que tengamos un logaritmo en el que no se ve base, se trata de logaritmo en base 10.

log3	log7	log10
Logaritmo de 3	Logaritmo de 7	Logaritmo de 10

Conozcamos ahora los tipos de logaritmo según su valor. Acompáñanos en este recorrido por este valioso instrumento matemático y date la oportunidad de entenderlo y dominarlo a satisfacción

LOGARITMO. Logaritmos Notables. Por su Valor

En la lección 2 vimos Los dos logaritmos notables por el valor de su base ahora conoceremos los tipos de logaritmos, de acuerdo a su valor. ¿Estás listo?

Logaritmos Notables según su Valor

Logaritmo en base b de b. $log_b b$

¿qué exponente debe elevar a b para que resulte b?

1, ya que toda potencia con exponente 1 es igual a la base.

$$log_b b = 1 \longrightarrow b^1 = b$$

Ejemplos

$log_3 3 = 1$ logaritmo en base 3 de 3 es 1

$log_{15} 15 = 1$ logaritmo en base 15 de 15 es 1

$log_{\star} \star = 1$ Logaritmo en base estrella de estrella es 1

Toda vez que la base y el argumento del logaritmo sean iguales el logaritmo vale 1

Logaritmo en base b de 1. $log_b 1$

¿qué exponente debe elevar a b para que resulte 1?

Sabemos que toda potencia con exponente 0 es igual a 1.

$$log_b 1 = 0 \longrightarrow b^0 = 1$$

$Log_5 1 = 0$
Logaritmo en base 5 de 1 es 0

$Log_{1000} 1 = 0$
Logaritmo en base 1000 de 1 es 0

Logaritmo en base b de 0. $log_b 0$

¿qué exponente debe elevar a b para que resulte 0?

No existe ningún número real que satisfaga esta igualdad.

$log_b 0 = \nexists$ se simboliza con menos infinito $log_b 0 = -\infty$

Recordemos. Infinito es un símbolo matemático con el que representamos un valor ilimitadamente grande. pero negativo

En este caso, menos infinito representa que ese logaritmo crece ilimitadamente hacia valores negativos.

$log_b 0 = -\infty$
Logaritmo en base b de 0 es $-\infty$

$b^{-\infty} \rightarrow 0$
Porque b elevado a $-\infty$ tiende a 0

Esto será estudiado en detalle en la sección de **Verdadero Valor**, matemática de 5to año.

LOGARITMO. Definición de Logaritmo. Calcular el Valor de X. Ejercicio 1

Ejercicio 1

Hallar el valor de x $Log_2 x = 5$

Base del logaritmo: 2
Argumento del logaritmo: x
Valor del logaritmo: 5

$Log_2 x = 5 \xrightarrow{\text{Aplicando Definición}} 2^5 = x$

Prop. Simétrica de la Igualdad $x = 2^5$

Efectuando la potencia $x = 32$

$\boxed{x = 32}$

Ejercicio 2

Hallar el valor de x $Log_{64} x = -1/3$

Base del logaritmo: 64
Argumento del logaritmo: x
Valor del logaritmo: -1/3

$\log_{64} x = -\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{Aplicando Definición}} 64^{-\frac{1}{3}} = x$

Prop. Simétrica de la Igualdad $x = 64^{-\frac{1}{3}}$

Transformaremos la potencia hasta simplificarla a la mínima expresión

Escribimos 64 como una potencia de 2 $x = (2^6)^{-\frac{1}{3}}$

Potencia de potencia: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ $x = 2^{6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}$

Efectuando el producto del exponente $x = 2^{-\frac{6}{3}}$

Simplificando la fracción $x = 2^{-2}$

Potencia con exponente negativo: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $x = \frac{1}{2^2}$

Efectuando la potencia $x = \frac{1}{4}$

$\boxed{x = \frac{1}{4}}$

Ejercicio 3

Hallar el valor de x $Log_x 81 = 4$

Base del logaritmo: x
Argumento del logaritmo: 81
Valor del logaritmo: 4

$\log_x 81 = 4 \xrightarrow{\text{Aplicando Definición}} 81 = x^4$

Prop. Simétrica de la Igualdad $x^4 = 81$

Despejando x en la ecuación $x = \pm\sqrt[4]{81}$

Despejando x en la ecuación $x = -3$ $x = 3$

Recordemos. El valor de la base de un logaritmo debe estar entre 0 y 1, o ser mayor que 1.

De los dos valores obtenidos de la ecuación, descartamos el negativo. Porque la base no puede ser negativa.

$\cancel{x=-3}$ $x=3$

Solución $\boxed{x=3}$

Ejercicio 4

Hallar el valor de x $\log_{1/7} 343 = x$

Base del logaritmo: 64
Argumento del logaritmo: x
Valor del logaritmo: -1/3

$\log_{1/7} 343 = x \xrightarrow{\text{Aplicando Definición}} \left(\tfrac{1}{7}\right)^x = 343$

Potencia con exponente negativo: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\quad (7^{-1})^x = 343$

Potencia de potencia: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ $\quad 7^{-x} = 343$

Descomponemos 343: $343 = 7^3$ $\quad 7^{-x} = 7^3$

Como las bases son iguales los exponentes son iguales: $\quad -x = 3$

Solución $\boxed{x=-3}$

LOGARITMO. Definición de Logaritmo. Calcular el Valor de X. Ejercicio 2

Ejercicio 5

Hallar el valor de x $\log_{0,02} x = 3$

Base del logaritmo: 0,02
Argumento del logaritmo: x
Valor del logaritmo: 3

$\log_{0,02} x = 3 \xrightarrow{\text{Aplicando Definición}} (0,02)^3 = x$

Prop. Simétrica de la Igualdad $\quad x = (0,02)^3$

0,02 tiene dos decimales, su fracción generatriz es: 2 dividido entre 100 $\quad x = \left(\dfrac{2}{100}\right)^3$

Simplificando $\quad x = \left(\dfrac{1}{50}\right)^3$

Efectuando la potencia $\quad x = \dfrac{1}{125000}$

Nota: 0,02 es un decimal exacto, transformaremos este decimal en fracción para efectuar la potencia.

Solución $\boxed{x = \dfrac{1}{125000}}$

Ejercicio 6

Hallar el valor de x $\log_x \frac{16}{9} = -2$

Base del logaritmo: x
Argumento del logaritmo: 16/9
Valor del logaritmo: -2

$$\log_x \frac{16}{9} = -2 \xrightarrow{\text{Aplicando Definición}} x^{-2} = {}^{16}\!/_{9}$$

Con el objetivo de lograr que x tenga exponente positivo, elevamos ambos lados de la igualdad a la -1.

$$\left(x^{-2}\right)^{-1} = \left({}^{16}\!/_{9}\right)^{-1}$$

Potencia de potencia: $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$ $\quad x^{-2\cdot(-1)} = \left({}^{16}\!/_{9}\right)^{-1}$

Potencia con exponente negativo: $x^2 = \dfrac{9}{16}$

Despejamos x: $x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{16}}$

De los dos valores obtenidos de la ecuación, descartamos el negativo. Porque la base no puede ser negativa.

$$\cancel{x = -\frac{3}{4}} \qquad x = \frac{3}{4}$$

Solución $\boxed{x = \frac{3}{4}}$

Emparejando el Lenguaje

Logaritmo. Es un exponente, al que hay elevar la base del logaritmo para que resulte el argumento en esta relación.
Logaritmo Neperiano, Logaritmo Natural. Es el logaritmo en base *e* (número de euler, *e* = 2,7182818284…)
Logaritmo de Briggs, Logaritmo Vulgar. Es el logaritmo en base *10*.

A Practicar

Hallar el valor de x en cada caso

1. $\log_7 x = 2$
2. $\log_4 x = 3$
3. $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$
4. $\log_{125} x = \frac{1}{3}$

5. $\log_x 28 = 1$
6. $\log_x 1 = 1125$
7. $\log_x 216 = 3$
8. $\log_x \frac{1}{\sqrt{11}} = -2$

5. $\log_{\sqrt{7}} 49 = x$
6. $\log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8} = x$
7. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5} = x$
8. $\log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}} = x$

¿Lo Hicimos Bien?

1. 49
2. 64
3. 8
4. 5

5. 28
6. 1
7. 6
8. 11

5. 4
6. -3
7. $-\frac{1}{2}$
8. $-\frac{3}{2}$