Determinantes de tercer orden

Marco Teórico

Un **factor determinante** es un número calculado a partir de las entradas de una matriz cuadrada. Tiene muchas propiedades e interpretaciones en álgebra lineal. Este concepto se centra en el procedimiento de cálculo de determinantes. Una vez que sepas cómo calcular el determinante de una 2×2 matriz, entonces usted será capaz de calcular el determinante de una 3×3matriz. Una vez que sepas cómo calcular el determinante de una 3×3 matriz se puede calcular el determinante de una 4×4 y así sucesivamente.

El determinante de una matriz Ase escribe como $|A|$. Para una 2×2 matriz A, el valor se calcula como:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det\ A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Observe cómo se multiplican las diagonales y luego se restan.

El determinante de una 3×3 matriz es más complicado.

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Por lo general, se comenzará observando la fila superior, a pesar de cualquier fila o columna funcionarán. A continuación, se utiliza el patrón de tablero de ajedrez en busca de signos (que se muestra a continuación) y crear pequeñas matrices 2×2

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Las más pequeñas 2×2 son las entradas que quedan cuando se ignoran la fila y columna del coeficiente que está trabajando.

$$\det\ B = |B| = +a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

A continuación, tomar el determinante de las 2×2 matrices más pequeñas y se obtiene una larga serie de cálculos.

$$= +a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$
$$= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$
$$= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

La mayoría de la gente no recuerda esta secuencia. Un matemático francés llamado Sarrus demostró un gran dispositivo para memorizar el cálculo del determinante de 3×3 las matrices. El primer paso es simplemente para copiar las dos primeras columnas a la derecha de la matriz. Luego, dibuja tres líneas diagonales que van abajo y hacia la derecha.

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Observa que corresponde exactamente a los tres términos positivos del determinante demostrado anteriormente. Luego, tres diagonales que van hacia arriba y hacia la derecha. *Estas diagonales corresponden exactamente a los tres términos negativos.*

$$\det\ B = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

La regla de Sarrus no funciona para los determinantes de matrices que no son de orden 3×3.

Ejemplo A

Encuentra $\det\ A$ para $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Solución: $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 15 - 2 = 13$

Ejemplo B

Encuentra $\det\ B$ para $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 3(0 \cdot 5 - 2 \cdot 1) - 2(5 \cdot 5 - 2 \cdot 2) + 1(5 \cdot 1 - 2 \cdot 0)$$
$$= -6 - 42 + 5 = -43$$

Ejemplo C

Encuentra el determinante de B del ejemplo B utilizando la regla de Sarrus.

Solución:

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$\det\ B = 0 + 8 + 5 - 0 - 6 - 50 = -43$$

Como se puede ver, la regla de Sarrus es eficiente y gran parte de los cálculos puede hacerse mentalmente. Además, los valores cero hacen que gran parte de la multiplicación más fácil.

Problema Concepto

Determinantes de matrices 2×2 se definen también según un sistema de 2 variables y ecuaciones 2.

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

Para eliminar la x, la escala de la primera ecuación c y por la segunda ecuación por una.

$$acx + bcy = ec$$
$$acx + ady = af$$

Restar la segunda ecuación de la primera y resolver para y.

$$ady - bcy = af - ec$$
$$y(ad - bc) = af - ec$$
$$y = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Al resolver para x también se consigue $ad - bc$ en el denominador de la solución general.

Este modelo llevó a la gente a empezar a utilizar esta estrategia en resolver sistemas de ecuaciones. El determinante se define de esta manera por lo que siempre será el denominador de la solución general de cualquiera de las variables.

Ejercicios Resueltos

1. Encontrar el determinante de la matriz siguiente.

$$C = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

2. Encontrar el determinante de la matriz siguiente.

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 12 & 5 & 13 \end{bmatrix}$$

3. Encontrar el determinante de la 4×4 matriz siguiente eligiendo cuidadosamente la fila o columna a trabajar.

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & 8 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Respuestas:

1. $$\det C = \begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

2. $$\det D = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 12 & 5 & 13 \end{vmatrix} = 4 \cdot 13 + 8 \cdot 7 \cdot 12 + 0 - 36 - 5 \cdot 7 \cdot 4 - 0 = 548$$

3. Observa que la tercera columna se compone de ceros y un uno. Elija esta columna para compensar los coeficientes, porque entonces, en lugar de tener que evaluar el determinante de cuatromatrices 3×3 individuales , sólo tiene que hacer uno.

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & 8 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & 9 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & 9 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot (-3) \cdot 9 + 5 \cdot 3 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 18 - 24 - (-45)$$

$$= -154$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resolver:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución:

Repetimos la primera y segunda columna

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} =$$

$= 2.1.0 + (-5).2.4 + 1.3.7 - [4.1.1 + 7.2.2 + 0.3.(-5)]$
$= 0 - 40 + 21 - (4 + 28 + 0)$
$= -19 - 32 = -51$

Respuesta:

$\mathbf{-51}$

2. Resolver:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 10 & -2 \\ 5 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

Solución:

Repetimos la primera y segunda columna

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 3 & 6 \\ 4 & 10 & -2 & 4 & 10 \\ 5 & 7 & 5 & 5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$= 3.10.5 + (6).(-2).5 + 1.4.7$
$\quad - [5.10.1 + 7.(-2).3 + 5.4.6]$
$= 150 - 60 + 28 - (50 - 42 + 120)$
$= 118 - 128 = -10$

Respuesta:

$\mathbf{-10}$

3. Resolver:

Solución:

Repetimos la primera y segunda columna

$$A = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= 4.6.0 + (-2).4.3 + 3.5.2 - [3.6.3 + 2.4.4 + 0.3.(-5)]$
$= 0 - 24 + 30 - (54 + 32 + 0)$
$= 6 - 86 = -80$

Respuesta:

$\mathbf{-80}$

4. Resolver:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-5}{2} & \frac{1}{3} \\ 3 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

Solución:
Repetimos la primera y segunda columna

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{2} \\ 3 & \frac{1}{2} & 2 & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{2} & 0 & \frac{4}{3} & \frac{7}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{1}{2}.0 + \left(-\frac{5}{2}\right).2.\frac{4}{3} + \frac{1}{3}.3.\frac{7}{2} - \left[\frac{4}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \frac{7}{2}.2.\frac{2}{3} + 0.3.\left(-\frac{5}{2}\right)\right]$$
$$= 0 - \frac{20}{3} + \frac{7}{2} - \left(\frac{2}{9} + \frac{14}{3}\right)$$
$$= -\frac{19}{6} - \frac{44}{9} = -\frac{145}{18}$$

Respuesta:

$\mathbf{-\frac{145}{18}}$

5. Resolver:

$$A = \begin{vmatrix} 6 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Solución:
Repetimos la primera y segunda columna

$$\begin{vmatrix} 6 & -4 & 3 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 6.(0).2 + (-4).1.1 + 3.2.3 - [1.0.3 + 3.1.6 + 2.2.(-4)]$
$= 0 - 4 + 18 - (0 + 18 - 16)$
$= 14 - 2 = 12$

Respuesta:

$\mathbf{12}$

6. Resolver:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

Repetimos la primera y segunda columna

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 4.3.3 + (6).(-2).2 + 2.1.7 - [2.3.2 + 7.(-2).4 + 3.1.6]$$
$$= 36 - 24 + 14 - (12 - 56 + 18)$$
$$= 26 - 26 = 0$$

Respuesta:

$\mathbf{0}$

7. Resolver:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{1}{2} \\ 6 & \frac{1}{5} & 3 \\ \frac{4}{5} & \frac{7}{3} & 0 \end{vmatrix}$$

Solución:

Repetimos la primera y segunda columna

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 6 & \frac{1}{5} & 3 & 6 & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{7}{3} & 0 & \frac{4}{5} & \frac{7}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{5}.0 + \left(-\frac{5}{3}\right).3.\frac{4}{5} + \frac{1}{2}.6.\frac{7}{3} - \left[\frac{4}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{2} + \frac{7}{3}.3.\frac{1}{3} + 0.6.\left(-\frac{5}{3}\right)\right]$$
$$= 0 - 4 + 7 - \left(\frac{2}{25} + \frac{7}{3} + 0\right)$$
$$= 3 - \frac{181}{75} = \frac{44}{75}$$

Respuesta:

$\mathbf{\frac{44}{75}}$

8. Resolver:

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 & 5 \\ 4 & 8 & -3 \\ 12 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Solución:

Repetimos la primera y segunda columna

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 & 5 & 2 & -7 \\ 4 & 8 & -3 & 4 & 8 \\ 12 & 0 & -2 & 12 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2.8.(-2) + (-7).(-3).(12) + 5.4.0 - [(12).8.5 + 0.(-3).2 + (-2).4.(-7)]$$
$$= -32 + 252 + 0 - (480 + 0 + 56)$$
$$= 220 - 536 = -316$$

Respuesta:

$\mathbf{-316}$

9. Resolver:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\frac{4}{3} + 0 - \frac{2}{5}$$
$$0 + \frac{8}{3} + 0$$

Solución:

Repetimos la primera y segunda columna

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{3} & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 2 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} .3 + 0.2.0 + \frac{2}{5} . (-1).1 - \left[0. \frac{1}{3} . \frac{2}{5} + 1.2. \frac{4}{3} + 3. (-1).0\right]$$
$$= \frac{4}{3} + 0 - \frac{2}{5} - \left(0 + \frac{8}{3} + 0\right)$$
$$= \frac{14}{15} - \frac{8}{3} = -\frac{26}{15}$$

Respuesta:

$$\mathbf{-\frac{26}{15}}$$

10 Resolver:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución:

Repetimos la primera y segunda columna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1.1.0 + 2.2.1 + 0.0.2 - [1.1.0 + 2.2.1 + 0.0.2]$$
$$= 0 + 4 + 0 - (0 + 4 + 0)$$
$$= 4 - 4 = 0$$

Respuesta:

$$\mathbf{0}$$

Profesor :Militza Indaburo Fe y Alegría Versión :2016-07-05

Glosario

El **determinante** de una matriz es un número calculado a partir de las entradas de una matriz. El procedimiento se deriva de la resolución de sistemas lineales.

La regla de Sarrus es una técnica de memorización que le permite calcular el determinante de 3×3 las matrices de manera eficiente.

Otras Referencias

Videos.