

## Materia: Matemática de Octavo

### Tema: Conjunto Q (Números Racionales)

Vamos a recordar los conjuntos numéricos estudiados hasta el momento.

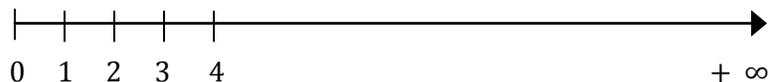
#### (1.) Conjunto de los números Naturales

Son aquellos que utilizamos para contar o enumerar los elementos de un conjunto. Se denotan con la letra  $\mathbb{N}$  y escribimos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n\}$$

donde  $n$  es cualquier número natural, se extiende indefinidamente hacia la derecha y está completamente ordenado teniendo como primer elemento (el cero).

En la recta numérica tenemos:



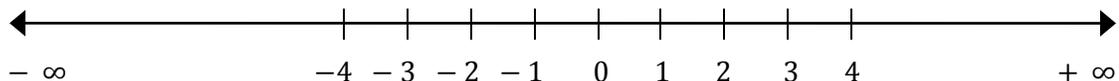
#### (2.) Conjunto de los números Enteros

Es el conjunto formado por los números naturales y sus opuestos. Recordemos que el opuesto de un número es el mismo número con el signo contrario. Por ejemplo: el opuesto de  $-1$  es  $+1$  y viceversa.

Se denota con la letra  $\mathbb{Z}$  y escribimos:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

En la recta numérica tenemos:



Podemos observar que se extiende indefinidamente tanto a la derecha como a la izquierda. Al igual que los Números Naturales es completamente ordenado pero no posee primer elemento ni último elemento.

Es importante destacar que la asociación de “dos sentidos opuestos” a los números enteros, se traduce usualmente en: atrás – adelante, bajar – subir, debe – haber, entre otros.

### (3.) Conjunto de los números Racionales

Está formado por todos aquellos números que podemos expresar mediante una fracción, también conocidos como *quebrados*, es decir,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

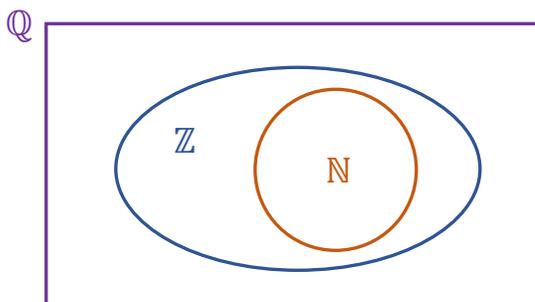
se lee

“el conjunto  $\mathbb{Q}$  está formado por los elementos  $\frac{a}{b}$  tal que  $a$  (numerador) pertenece al conjunto de los números enteros ( $\mathbb{Z}$ ) y  $b$  (denominador) pertenece al conjunto de los enteros sin el cero ( $\mathbb{Z}^*$ )”

El denominador indica en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad y el numerador, cuántas partes se han tomado de esas partes iguales.

Por ejemplo: en la fracción o quebrado  $\frac{2}{5}$ , el numerador indica que se han tomado dos partes iguales de cinco partes iguales en las que se ha dividido la unidad.

Así tenemos que los números naturales son enteros y a la vez racionales y los números enteros también son racionales, lo que podemos representar de la forma siguiente:



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

se lee

“el conjunto  $\mathbb{N}$  es subconjunto de  $\mathbb{Z}$  y este a su vez es subconjunto de  $\mathbb{Q}$ ”

Podríamos preguntarnos ¿por qué un número natural es racional? y ¿por qué un número entero es racional?

Para responder a estas preguntas basta con referirnos a la definición de un número racional. Así el número 2 se puede escribir como  $\frac{2}{1}$  o por ejemplo si tenemos el número  $-3$  lo podemos escribir como  $\frac{-3}{1}$

### Subconjuntos notables de $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}_+$  : son los números racionales positivos

$\mathbb{Q}_-$  : son los números racionales negativos

$\mathbb{Q}^*$  : son los números racionales positivos y negativos sin el cero

Las fracciones pueden clasificarse en tres grandes grupos:

(a.) Propia: si el numerador es menor que el denominador, esto es,

Sean  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^*$ . Si  $a < b$  entonces decimos que  $\frac{a}{b}$  es una fracción propia, la cual es siempre menor que la unidad.

Por ejemplo:  $\frac{3}{8}$  se lee “tres octavos”



(b.) Unidad: si el numerador es igual al denominador, esto es,

Sean  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^*$ . Si  $a = b$  entonces decimos que  $\frac{a}{b}$  es la fracción unidad

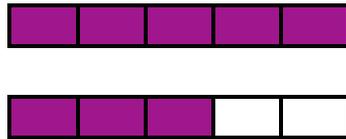
Por ejemplo:  $\frac{7}{7}$  se lee “siete séptimos” y es igual a 1 (unidad)



(c.) Impropia: si el numerador es mayor que el denominador, esto es,

Sean  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^*$ . Si  $a > b$  entonces decimos que  $\frac{a}{b}$  es una fracción impropia, la cual es siempre mayor a la unidad.

Por ejemplo:  $\frac{8}{5}$  se lee “ocho quintos”



Toda fracción impropia puede expresarse como un **Número Mixto**, que consta de un entero y una fracción propia, esto es,

Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $c \in \mathbb{Z}^*$ . Decimos que  $a\frac{b}{c}$  es un número mixto, donde “ $a$ ” es la parte entera y “ $\frac{b}{c}$ ” es la parte fraccionaria.

En el ejemplo anterior, si dividimos el numerador entre el denominador:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{parte entera (cociente)}} \\ \xrightarrow{\text{numerador de la fracción (residuo)}} \end{array} \quad 1\frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

“Notemos que el denominador es el mismo (divisor)”

El número mixto  $1\frac{3}{5}$  también puede escribirse como una suma de la parte entera con la parte fraccionaria, así:  $1 + \frac{3}{5}$ , de allí su representación gráfica.

¿Cómo podemos convertir un número mixto a fracción impropia?

Multiplicamos la parte entera por el denominador y le sumamos el numerador, el resultado será el nuevo numerador de la fracción, y el denominador es el mismo.

Siguiendo el ejemplo con el que venimos trabajando, tenemos:

$$1\frac{3}{5} = \frac{1.5 + 3}{5} = \frac{5 + 3}{5} = \frac{8}{5}$$

Ahora bien, las fracciones pueden simplificarse, amplificarse y ordenarse. Veamos:

Si queremos **Simplificar** una fracción, dividimos numerador y denominador por un mismo número que sea divisor de ambos.

Ejemplos: simplifica las siguientes fracciones hasta obtener la fracción irreducible:

(i.)  $\frac{350}{250} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$       1ro. dividimos entre 10, o lo que es lo mismo simplificamos el cero del numerador con el cero del denominador y luego dividimos entre 5

(ii.)  $-\frac{66}{294} = -\frac{33}{147} = -\frac{11}{49}$       1ro. dividimos entre 2 y luego dividimos entre 3

Si queremos **Amplificar** una fracción, multiplicamos por un número cualquiera el numerador y el denominador.

Ejemplos: amplifica dos veces las siguientes fracciones:

(i.)  $\frac{3}{2} = \frac{9}{6} = \frac{45}{30}$       1ro. multiplicamos por 3 y luego por 5

(ii.)  $-\frac{6}{11} = -\frac{24}{44} = -\frac{240}{440}$       1ro. multiplicamos por 4 y luego por 10

Las fracciones obtenidas al simplificar o amplificar decimos que son **Equivalentes** a las fracciones dadas, esto es,

Sean  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ ,  $b \neq 0, d \neq 0$ . Si  $a \cdot d = b \cdot c$  entonces decimos que  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$  son fracciones equivalentes.

Ejemplos: determina si cada par de fracciones son equivalentes

(i.)  $\frac{9}{6} = \frac{45}{30}$  son equivalentes ya que  $9 \cdot 30 = 6 \cdot 45 \Rightarrow 270 = 270$

(ii.)  $-\frac{6}{11} = -\frac{25}{44}$  no son equivalentes ya que  $-6 \cdot 44 \neq 11 \cdot (-25) \Rightarrow -264 \neq -275$

### NOTA IMPORTANTE

$$\text{Sea } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, b \neq 0, \text{ se cumple que } -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

En una fracción “negativa” el signo “menos” puede colocarse delante de la fracción o en el numerador o en el denominador. Sin embargo, generalmente se utiliza delante de la fracción o en el numerador por comodidad a la hora de realizar los cálculos.

**No debe confundirse**  $-\frac{a}{b} \neq \frac{-a}{-b}$ , ya que  $\begin{cases} 1\text{ra. fracción es negativa} \\ 2\text{da. fracción es positiva} \end{cases}$

Para ordenar fracciones lo podemos hacer de dos maneras, en forma Creciente o Decreciente. Debemos tener en cuenta que:

- Si los denominadores de las fracciones son iguales, será mayor la fracción cuyo numerador sea mayor.
- Si los denominadores son diferentes, debemos convertir cada número racional en una fracción equivalente, que tengan entre sí igual denominador y aplicamos el criterio anterior.

Veamos, si queremos ordenar en forma:

- (a.) Creciente: de menor a mayor (utilizamos en símbolo “<” menor que o “≤” menor o igual que”

Ejemplos: ordena en forma creciente los siguientes grupos de números racionales.

(i.)  $\frac{7}{3}, \frac{3}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3} \Rightarrow -\frac{5}{3} < \frac{3}{3} < \frac{7}{3} < \frac{10}{3}$

Recordemos que todo número negativo es menor que un número positivo

$$(ii.) \quad -\frac{7}{3}, 2, -\frac{5}{2}, \frac{8}{9}$$

Como el  $m.c.m(3,2,9) = 18$ , vamos a convertir las fracciones dadas en otras equivalentes cuyo denominador sea 18, así:

$$-\frac{7}{3} = -\frac{42}{18} \quad \text{amplificamos la fracción por 6 para que el denominador sea 18}$$

$$2 = \frac{36}{18} \quad \text{amplificamos el número racional 2 (con denominador 1) por 18}$$

$$-\frac{5}{2} = -\frac{45}{18} \quad \text{amplificamos la fracción por 9}$$

$$\frac{8}{9} = \frac{16}{18} \quad \text{amplificamos fracción por 2}$$

Ahora, aplicando el criterio de orden cuando las fracciones tienen igual denominador, tenemos:

$$-\frac{45}{18} < -\frac{42}{18} < \frac{16}{18} < \frac{36}{18}$$

Finalmente, sustituimos por las fracciones dadas al principio

$$-\frac{5}{2} < -\frac{7}{3} < \frac{8}{9} < 2$$

Recordemos que un número negativo es menor a medida que se encuentra más lejos del cero

(b.) Decreciente: de mayor a menor (utilizamos en símbolo “>” mayor que o “≥” mayor o igual que”

Ejemplos: ordena en forma decreciente los siguientes grupos de números racionales.

$$(i.) \quad \frac{11}{12}, -\frac{1}{12}, -\frac{7}{12}, \frac{0}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{11}{12} > \frac{0}{12} > -\frac{1}{12} > -\frac{7}{12}$$

Recordemos que “cero” entre cualquier cantidad es igual a cero, así:  $\frac{0}{12} = 0$

$$(ii.) \quad -\frac{2}{5}, 1, -\frac{5}{3}, \frac{7}{15}$$

Como el  $m.c.m(5,3,15) = 15$ , vamos a convertir las fracciones dadas en otras equivalentes cuyo denominador sea 15, así:

$$-\frac{2}{5} = -\frac{6}{15} \quad \text{amplificamos la fracción por 3 para que el denominador sea 15}$$

$$1 = \frac{15}{15} \quad \text{amplificamos el número racional 1 (con denominador 1) por 15}$$

$$-\frac{5}{3} = -\frac{25}{15} \quad \text{amplificamos la fracción por 5}$$

$$\frac{7}{15} \quad \text{queda igual, ya que su denominador es 15}$$

Ahora, aplicando el criterio de orden cuando las fracciones tienen el mismo denominador, tenemos:

$$\frac{15}{15} > \frac{7}{15} > -\frac{6}{15} > -\frac{25}{15}$$

Finalmente, sustituimos por las fracciones dadas al principio

$$1 > \frac{7}{15} > -\frac{2}{5} > -\frac{5}{3}$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Convertir en fracción impropia los siguientes números mixtos:

(a.)  $5\frac{7}{106}$

(b.)  $-1\frac{3}{5}$

(c.)  $16\frac{1}{13}$

(d.)  $-103\frac{2}{3}$

(e.)  $3\frac{5}{41}$

(f.)  $-7\frac{1}{2}$

(g.)  $8\frac{5}{7}$

(h.)  $-502\frac{3}{4}$

(i.)  $9\frac{7}{100}$

2. Convertir a número mixto las siguientes fracciones impropias:

(a.)  $\frac{112}{11}$

(b.)  $-\frac{7}{3}$

(c.)  $\frac{13}{8}$

(d.)  $-\frac{125}{35}$

(e.)  $\frac{8}{5}$

(f.)  $-\frac{215}{74}$

(g.)  $\frac{102}{38}$

(h.)  $-\frac{23}{7}$

(i.)  $\frac{15}{12}$

3. Hallar la fracción irreducible de cada una de las siguientes fracciones:

(a.)  $\frac{25}{55}$

(b.)  $-\frac{343}{539}$

(c.)  $\frac{6006}{12012}$

(d.)  $-\frac{84}{126}$

(e.)  $\frac{64}{192}$

(f.)  $-\frac{72}{324}$

(g.)  $\frac{1690}{3540}$

(h.)  $-\frac{411}{685}$

(i.)  $\frac{539}{833}$

4. Amplifica tres veces la siguientes fracciones:

(a.)  $\frac{11}{13}$

(b.)  $-\frac{7}{8}$

(c.)  $\frac{1}{8}$

(d.)  $-\frac{1}{5}$

(e.)  $\frac{9}{5}$

(f.)  $-\frac{21}{7}$

(g.)  $\frac{10}{3}$

(h.)  $-\frac{2}{7}$

(i.)  $\frac{15}{2}$

5. Ordena en forma Creciente los siguientes grupos de números racionales:

(a.)  $\frac{10}{12}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{6}, \frac{3}{4}, -1$

(b.)  $\frac{2}{5}, -\frac{3}{10}, -\frac{7}{3}, 0$

(c.)  $\frac{111}{9}, \frac{12}{9}, \frac{75}{9}, \frac{23}{9}$

(d.)  $\frac{1}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{7}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}$

(e.)  $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{0}{2}, -\frac{10}{2}$

(f.)  $\frac{13}{2}, \frac{1}{3}, \frac{7}{4}, \frac{5}{12}$

6. Ordena en forma Decreciente los siguientes grupos de números racionales:

(a.)  $\frac{-10}{12}, \frac{1}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{3}{4}, 1$

(b.)  $-\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{7}{3}, 0$

(c.)  $-\frac{111}{9}, -\frac{12}{9}, -\frac{75}{9}, -\frac{23}{9}$

(d.)  $\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}$

(e.)  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{0}{2}, \frac{10}{2}$

(f.)  $\frac{-13}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{7}{4}, \frac{5}{-12}$

7. Resuelve los siguientes problemas:

- (a.) Un tanque tiene tres llaves que permiten la entrada de agua en cantidades de 60 lts en 5 minutos, 98 lts en 7 minutos y 132 lts en 12 minutos. Tiene asimismo, dos llaves de desagüe que permiten la salida de agua de 70 lts en 5 minutos y 90 lts en 6 minutos, respectivamente. Si el tanque está vacío y abiertas las llaves de salida, al abrir las tres llaves de entrada a la vez, se necesitan 60 minutos para llenar el tanque, ¿cuál es la capacidad del tanque de agua?
- (b.) El Sr. Rengifo compró un terreno de  $80\,000\text{ m}^2$  a Bs. 15,00 el  $\text{m}^2$ . Al cabo de 2 años vendió dicho terreno en Bs. 2 000 000,00. ¿a qué precio vendió el  $\text{m}^2$  de terreno? y ¿a qué porcentaje corresponde la ganancia?

## RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1.

(a.)  $\frac{537}{106}$

(b.)  $-\frac{8}{5}$

(c.)  $\frac{209}{13}$

(d.)  $-\frac{311}{3}$

(e.)  $\frac{128}{41}$

(f.)  $-\frac{15}{2}$

(g.)  $\frac{61}{7}$

(h.)  $-\frac{2011}{4}$

(i.)  $\frac{907}{100}$

2.

(a.)  $10\frac{2}{11}$

(b.)  $-2\frac{1}{3}$

(c.)  $1\frac{5}{8}$

(d.)  $-3\frac{4}{7}$

(e.)  $1\frac{3}{5}$

(f.)  $-2\frac{67}{74}$

(g.)  $2\frac{13}{19}$

(h.)  $-3\frac{2}{7}$

(i.)  $1\frac{1}{4}$

3.

(a.)  $\frac{5}{11}$

(b.)  $-\frac{7}{11}$

(c.)  $\frac{1}{2}$

(d.)  $-\frac{2}{3}$

(e.)  $\frac{1}{3}$

(f.)  $-\frac{2}{9}$

(g.)  $\frac{169}{354}$

(h.)  $-\frac{3}{5}$

(i.)  $\frac{11}{17}$

4.

Es válido cualquier número que utilice para amplificar cada una de las fracciones dadas.

5.

(a.)  $-1 < -\frac{1}{3} < \frac{3}{4} < \frac{10}{12} < \frac{7}{6}$

(b.)  $-\frac{7}{3} < -\frac{3}{10} < 0 < \frac{2}{5}$

(c.)  $\frac{12}{9} < \frac{23}{9} < \frac{75}{9} < \frac{111}{9}$

(d.)  $-\frac{4}{5} < -\frac{1}{5} < \frac{1}{5} < \frac{3}{5} < \frac{7}{5}$

(e.)  $-\frac{10}{2} < -\frac{3}{2} < -\frac{1}{2} < \frac{0}{2}$

(f.)  $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{7}{4} < \frac{13}{2}$

6.

(a.)  $1 > \frac{1}{3} > -\frac{3}{4} > \frac{-10}{12} > -\frac{7}{6}$

(b.)  $\frac{7}{3} > \frac{3}{10} > 0 > -\frac{2}{5}$

(c.)  $\frac{-12}{9} > -\frac{23}{9} > \frac{-75}{9} > -\frac{111}{9}$

(d.)  $\frac{4}{5} > \frac{1}{5} > \frac{-1}{5} > \frac{-3}{5} > \frac{-7}{5}$

(e.)  $\frac{10}{2} > \frac{3}{2} > \frac{1}{2} > \frac{0}{2}$

(f.)  $-\frac{1}{3} > \frac{5}{-12} > -\frac{7}{4} > \frac{-13}{2}$

7.

- (a.) Para resolver este problema debemos saber cuántos lts de agua entran y salen al mismo tiempo. Por ejemplo, podríamos calcular cuántos litros de agua entran y salen en 5 minutos, así: entran 185 lts y salen 145 lts, respectivamente. Por lo tanto, en 5 minutos quedan dentro del tanque 40 lts de agua.

Como dicho tanque se llena en 60 minutos, tenemos que la capacidad del mismo es 480 lts.

- (b.) El  $m^2$  de terreno lo vendió a Bs.25,00, la ganancia es Bs. 800 000,00 lo que corresponde a un 66,66%, aproximadamente.

Recordemos que el porcentaje (%), es una fracción cuyo denominador es 100 y el numerador son las partes iguales que se han tomado de las 100 partes iguales.

Por ejemplo:  $30\% = \frac{30}{100}$