6

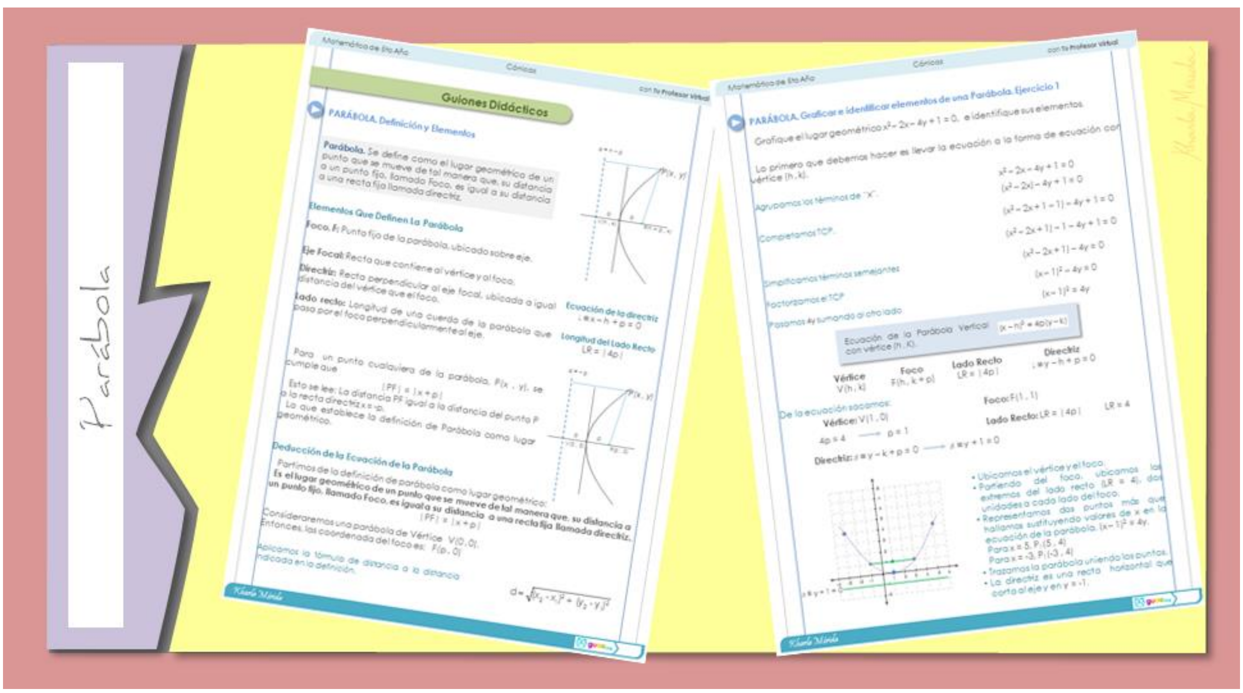
6ta Unidad

Cónicas

6.5 Parábola

Si se te hace difícil, toma pausa, organiza las ideas, apóyate en quien domina el tema que estás abordando, y ve de nuevo por el logro de esa meta.

Descripción



La Parábola, es la cuarta de las cónicas de esta secuencia. En este objetivo cuentas con la presentación de la ecuación de la parábola como lugar geométrico, así como sus elementos, relación con otros elementos geométricos y Aplicaciones.

Conocimientos Previos Requeridos

Plano Cartesiano, Punto Medio, Distancia entre Puntos del Plano, Pendiente de un Recta, Rectas en el Plano, Lugares Geométricos, Álgebra Básica, Simplificación de Expresiones Algebraicas, Despeje.

Contenido

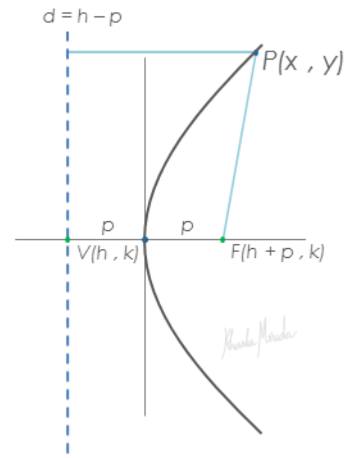
Definición y Elementos de Parábola, Casos de Parábola, Graficar e identificar elementos de una Parábola, Hallar Ecuaciones de Parábola, Ejercicios.

Videos Disponibles

Los guiones didácticos que aparecen en este objetivo corresponden a videos en desarrollo.

Guiones Didácticos

PARÁBOLA. Definición y Elementos



Parábola. Se define como el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que, su distancia a un punto fijo, llamado Foco, es igual a su distancia a una recta fija llamada directriz.

Elementos Que Definen La Parábola

Foco, F: Punto fijo de la parábola, ubicado sobre eje.

Eje Focal: Recta que contiene al vértice y al foco.

Directriz: Recta perpendicular al eje focal, ubicada a igual distancia del vértice que el foco.

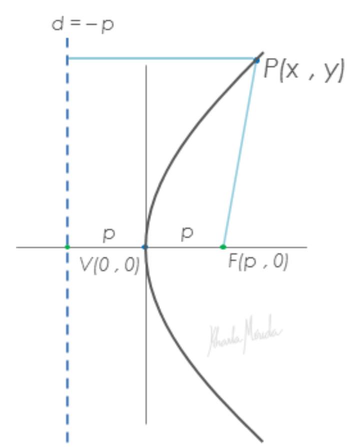
Lado recto: Longitud de una cuerda de la parábola que pasa por el foco perpendicularmente al eje.

Ecuación de la directriz

$$\ell \equiv x - h + p = 0$$

Longitud del Lado Recto

$$LR = |4p|$$



Para un punto cualquiera de la parábola, P(x , y), se cumple que

$$|PF| = |x + p|$$

Esto se lee: La distancia PF igual a la distancia del punto P a la recta directriz $x = -p$.

Lo que establece la definición de Parábola como lugar geométrico.

Deducción de la Ecuación de la Parábola

Partimos de la definición de parábola como lugar geométrico:

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que, su distancia a un punto fijo, llamado Foco, es igual a su distancia a una recta fija llamada directriz..

$$|PF| = |x + p|$$

Consideraremos una parábola de Vértice V(0 , 0).
Entonces, las coordenada del foco es: F(p , 0)

Aplicamos la fórmula de distancia a la distancia indicada en la definición.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distancias PF' y PF: $\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = |x+p|$

Elevo al cuadrado ambos lados $\left(\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = (x+p)^2$

$$(x-p)^2 + (y-0)^2 = (x+p)^2$$

Desarrollamos los productos notables

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

Simplificamos términos iguales de ambos lados de la igualdad, y pasamos 2xp sumando al 2do lado de la igualdad.

$$y^2 = 2xp + 2xp$$

$$y^2 = 4xp$$

Ecuación de la Parábola Horizontal con vértice en el origen.	$y^2 = 4px$

Vértice	**Foco**	**Lado Recto**	**Directriz**
V(0 , 0)	F(p, 0)	LR = | 4p |	$d \equiv x + p = 0$

Ecuación de la Parábola Horizontal con vértice (h , K).	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Vértice	**Foco**	**Lado Recto**	**Directriz**
V(h , k)	F(h + p, k)	LR = | 4p |	$d \equiv x - h + p = 0$

Ecuación de la Parábola Vertical con vértice en el origen.	$x^2 = 4py$

Vértice	**Foco**	**Lado Recto**	**Directriz**
V(0 , 0)	F(0, p)	LR = | 4p |	$d \equiv y + p = 0$

Ecuación de la Parábola Vertical con vértice (h , K).	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Vértice	**Foco**	**Lado Recto**	**Directriz**
V(h , k)	F(h , k + p)	LR = | 4p |	$d \equiv y - k + p = 0$

PARÁBOLA. Graficar e identificar elementos de una Parábola. Ejercicio 1

Grafique el lugar geométrico $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, e identifique sus elementos.

Lo primero que debemos hacer es llevar la ecuación a la forma de ecuación con vértice (h , k).

Agrupamos los términos de "x".

$$x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

$$(x^2 - 2x) - 4y + 1 = 0$$

Completamos TCP.

$$(x^2 - 2x + 1 - 1) - 4y + 1 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 - 4y + 1 = 0$$

Simplificamos términos semejantes

$$(x^2 - 2x + 1) - 4y = 0$$

Factorizamos el TCP

$$(x - 1)^2 - 4y = 0$$

Pasamos 4y sumando al otro lado

$$(x - 1)^2 = 4y$$

Ecuación de la Parábola Vertical con vértice (h , K). $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Vértice	Foco	Lado Recto	Directriz
V(h , k)	F(h , k + p)	LR = |4p|	$l \equiv y - h + p = 0$

De la ecuación sacamos:

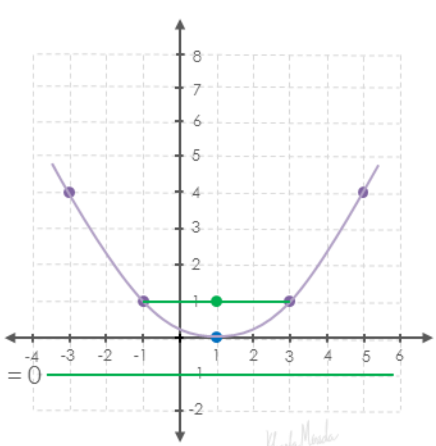
Vértice: V(1 , 0)

$4p = 4 \longrightarrow p = 1$

Foco: F(1 , 1)

Lado Recto: LR = |4p| LR = 4

Directriz: $d \equiv y - k + p = 0 \longrightarrow d \equiv y + 1 = 0$



- Ubicamos el vértice y el foco.
- Partiendo del foco, ubicamos los extremos del lado recto (LR = 4), dos unidades a cada lado del foco.
- Representamos dos puntos más que hallamos sustituyendo valores de x en la ecuación de la parábola, $(x - 1)^2 = 4y$.
  Para x = 5, $P_1(5 , 4)$
  Para x = -3, $P_1(-3 , 4)$
- Trazamos la parábola uniendo los puntos.
- La directriz es una recta horizontal que corta al eje y en y = -1.

PARÁBOLA. Graficar e identificar elementos de una Parábola. Ejercicio 2

Grafique el lugar geométrico $2y^2 - 2x - 2y + 9 = 0$, e identifique sus elementos.

Lo primero que debemos hacer es llevar la ecuación a la forma de ecuación con vértice (h , k).

$$2y^2 - 2x - 2y + 9 = 0$$

Agrupamos los términos de "x".

$$(2y^2 - 2y) - 2x + 9 = 0$$

Completamos TCP.

$$2(y^2 - y) - 2x + 9 = 0$$

$$2(y^2 - y + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}) - 2x + 9 = 0$$

$$2(y^2 - y + \tfrac{1}{4}) - \tfrac{1}{2} - 2x + 9 = 0$$

Simplificamos términos semejantes

Factorizamos el TCP

$$2(y - \tfrac{1}{2})^2 - 2x + 17/2 = 0$$

Pasamos 4y sumando al otro lado

$$2(y - \tfrac{1}{2})^2 = 2x - 17/2$$

$$(y - \tfrac{1}{2})^2 = x - 17/4$$

Ecuación de la Parábola Horizontal con vértice (h , K).	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Vértice	**Foco**	**Lado Recto**	**Directriz**
V(h , k)	F(h + p, k)	LR = | 4p |	$d \equiv x - h + p = 0$

De la ecuación sacamos:

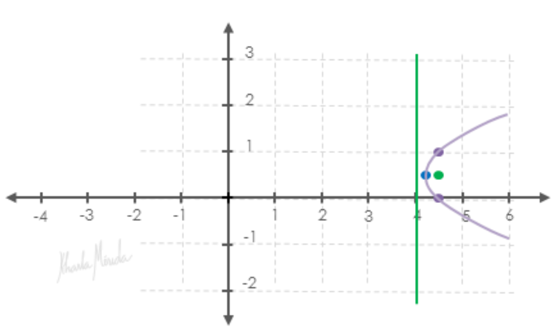
Vértice: V(17/4 , 1/2)

$4p = 1 \longrightarrow p = \tfrac{1}{4}$

Foco: F(9/2 , 1/2)

Lado Recto: LR = | 4p | LR = 1

Directriz: $d \equiv x - h + p = 0 \longrightarrow d \equiv x - 4 = 0$



- Ubicamos el vértice y el foco.
- Partiendo del foco, ubicamos los extremos del lado recto (LR = 1), media unidad por encima y media unidad por debajo del foco.
- Trazamos la parábola uniendo los puntos.
- La directriz es una recta vertical que corta al eje x en x = 4.

PARÁBOLA. Hallar Ecuaciones de Parábola. Ejercicio 1

Hallar la ecuación de una parábola cuya directriz es y = 1, se sabe que p = 2 y pasa por el punto (0 , 3).

Datos

Directriz: $y = 1$
$p = 2$
$P(0 , 3)$

Nota: cuando la directriz es una recta horizontal, la parábola es vertical.

Ecuación de la Parábola Vertical con vértice (h , K). $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Vértice	**Foco**	**Lado Recto**	**Directriz**
$V(h , k)$	$F(h , k+p)$	$LR = \lvert 4p \rvert$	$d \equiv y-k+p=0$

De los Datos:

$p = 2 \longrightarrow 4p = 8$

Lado Recto: $LR = \lvert 4p \rvert$ $\boxed{LR = 8}$

Directriz: $d \equiv y-k+p=0$

$d \equiv y+1=0 \longrightarrow -k+p=1$, $p = 2$ $\boxed{k = 1}$ $V(h , 1)$

De la ecuación de la parábola conocemos p y k.

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \longrightarrow (x-h)^2 = 4\cdot 2(y-1)$$

Usaremos las coordenadas del punto conocido para hallar el valor de h.

$P(0 , 3)$ $(0-h)^2 = 4\cdot 2(3-1)$, $h^2 = 16$ $\boxed{h = 4}$

Sustituimos el valor de h en la ecuación

$h = 4$ $(x-4)^2 = 4\cdot 2(y-1)$ $(x-4)^2 = 8(y-1)$

Desarrollamos el producto notable y propiedad distributiva

$(x-4)^2 = 8(y-1)$ $x^2 - 8x + 16 = 8y - 8$

Pasamos todos los términos al primer lado de la igualdad y simplificamos términos semejantes.

$$x^2 - 8x - 8y + 16 + 8 = 0$$

$$\boxed{x^2 - 8x - 8y + 24 = 0}$$

PARÁBOLA. Hallar Ecuaciones de Parábola. Ejercicio 2

Hallar la ecuación de una parábola que tiene eje focal vertical y pasa por los puntos (0, ¼) , (3 , -2) y (5 , -1)

Datos

Eje Focal Vertical
$P_1(0 , \frac{1}{4})$
$P_2(3 , -2)$
$P_3(5 , -1)$

Ecuación de la Parábola Vertical con vértice (h , K). $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Vértice	**Foco**	**Lado Recto**	**Directriz**
$V(h , k)$	$F(h , k+p)$	$LR = \lvert 4p \rvert$	$d \equiv y - k + p = 0$

Los datos no dan ningún valor notable de la ecuación de la parábola, pero si las coordenadas de tres puntos de la parábola.

Usaremos las coordenadas de los puntos conocidos para hallar los valores de h, k y p.

$P_1(0 , \frac{1}{4})$ $\quad (0-h)^2 = 4p(\frac{1}{4}-k)$

$P_2(3 , -2)$ $\quad (3-h)^2 = 4p(-2-k)$

$P_3(5 , -1)$ $\quad (5-h)^2 = 4p(-1-k)$

Desarrollamos productos notables y distributivas en cada ecuación

I $\quad h^2 = p - 4pk$

II $\quad 9 - 6h + h^2 = -8p - 4pk$

III $\quad 25 - 10h + h^2 = -4p - 4pk$

Aplicamos reducción a las ecuaciones I y II, y a las ecuaciones I y III, en ambos casos multiplicamos la ecuación I por -1.

I $\quad \cancel{-h^2} = -p + \cancel{4pk}$

II $\quad 9 - 6h + \cancel{h^2} = -8p - \cancel{4pk}$

$\quad 9 - 6h = -9p$

I $\quad \cancel{-h^2} = -p + \cancel{4pk}$

II $\quad 25 - 10h + \cancel{h^2} = -4p - \cancel{4pk}$

$\quad 25 - 10h = -5p$

Ordenamos y aplicamos reducción a las ecuaciones obtenidas.

$9p - 6h = -9$

$5p - 10h = -25$

$\cancel{45p} - 30h = -45$

$\cancel{-45p} + 90h = 225$

$60h = 180$ $\quad \boxed{h = 3}$

$90p - \cancel{60h} = -90$

$-30p + \cancel{60h} = 150$

$60p = 60$ $\quad \boxed{p = 1}$

Sustituimos los valores de h y p en la ecuación I para hallar k.

$h^2 = p - 4pk$

$3^2 = 1 - 4k$ $\quad \boxed{k = -2}$

Sustituimos los valores de h, k y p en la ecuación I para obtener la ecuación.

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ $\quad (x-3)^2 = 4 \cdot 1(y-(-2))$

$x^2 - 6x + 9 = 4y + 8$ $\quad \boxed{x^2 - 4y - 6x + 1 = 0}$

Emparejando el Lenguaje

Parábola. Se define como el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que, su distancia a un punto fijo, llamado Foco, es igual a su distancia a una recta fija llamada directriz.

A Practicar

Grafique las siguientes parábolas, indicando todos sus elementos:

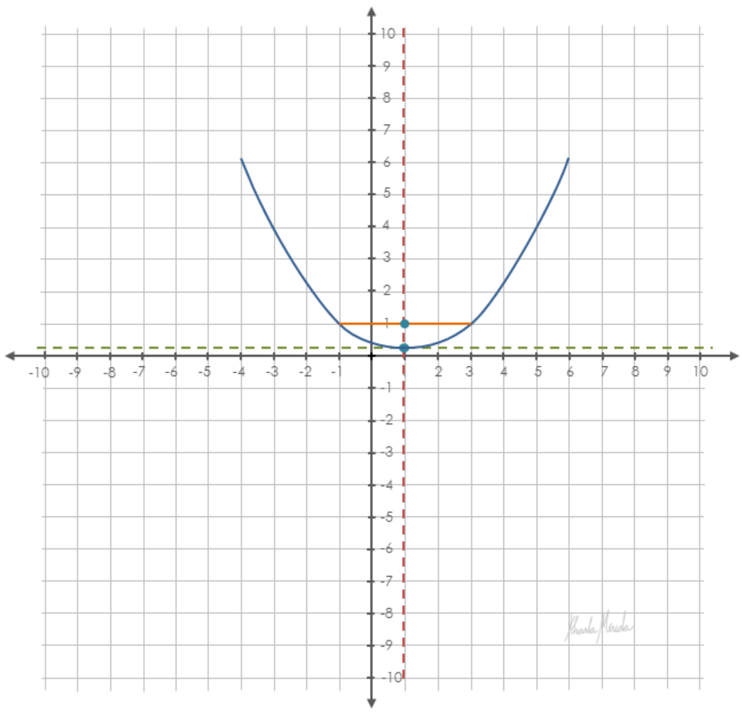
1. $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$
2. $y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$
3. $-x^2 - 4x - 6y + 17 = 0$

4. Determine la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta definida por $y = 1$, contiene al punto $(0, 3)$ y la menor distancia entre la parábola y la directriz es igual a 2.
5. Determine la ecuación canónica de la parábola cuya directriz $y + 2 = 0$ y los extremos del lado recto son los puntos $A(0, 2)$ $B(8, 2)$.

A Practicar

Grafique las siguientes parábolas, indicando todos sus elementos:

1. $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

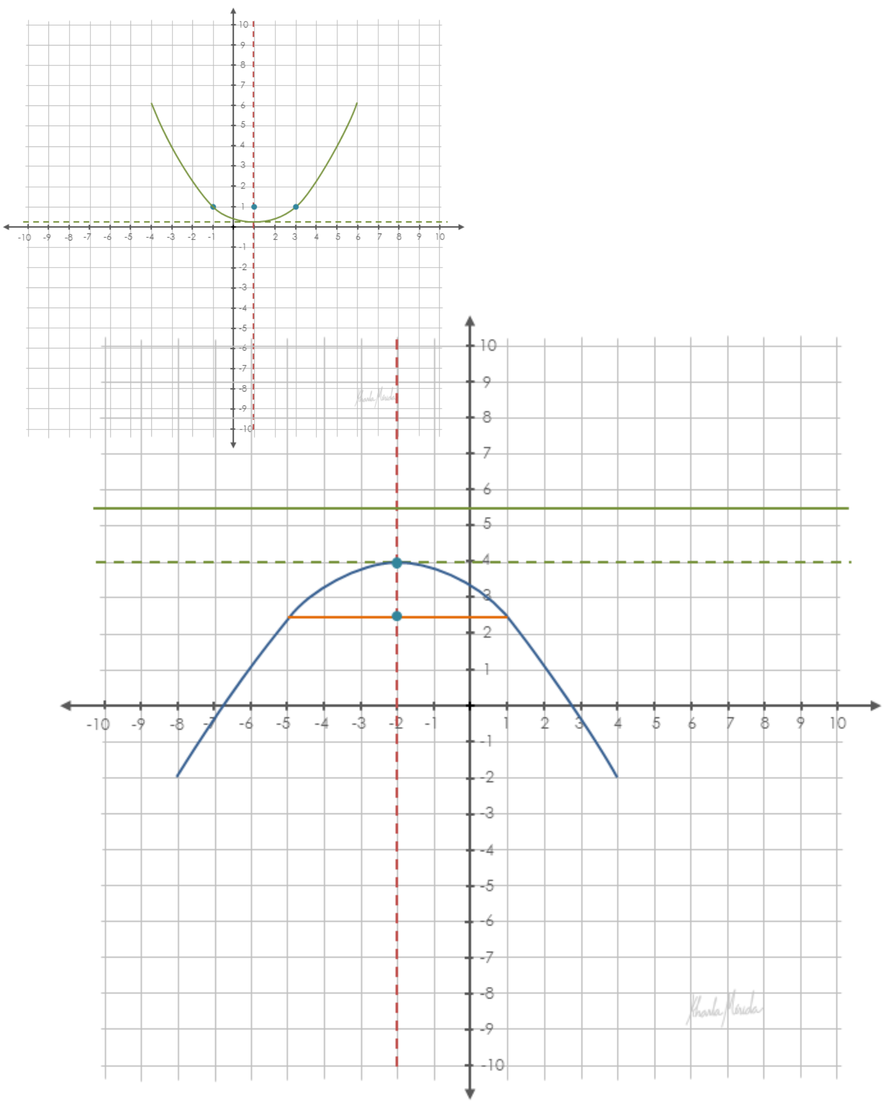


2. $y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$

Lo Hicimos Bien?

Grafique las siguientes parábolas, indicando todos sus elementos:

1. $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$
2. $y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$
3. $-x^2 - 4x - 6y + 17 = 0$



4. Determine la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta definida por y = 1, contiene al punto (0 , 3) y la menor distancia entre la parábola y la directriz es igual a 2.
5. Determine la ecuación canónica de la parábola cuya directriz y + 2 = 0 y los extremos del lado recto son los puntos A(0 , 2) B(8 , 2).