6

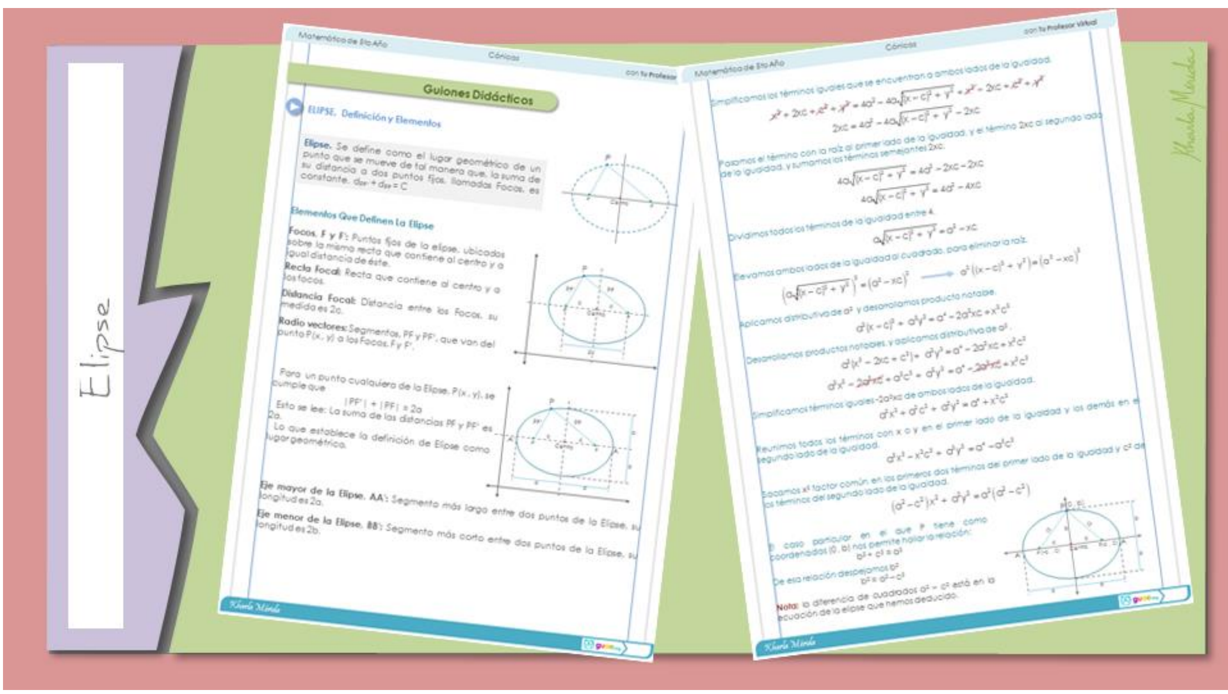
6ta Unidad

Cónicas

6.3 Elipse

Cuando deseamos el logro de un objetivo debemos preparar para ello nuestro estado emocional y físico, tanto como los conocimientos que tengamos para ello.

Descripción



La Elipse es la segunda de las cónicas que presentamos en esta secuencia. En este objetivo estudiamos en detalle la ecuación correspondiente a la elipse como lugar geométrico, así como sus elementos y relación con otros elementos geométricos.

Conocimientos Previos Requeridos

Plano Cartesiano, Punto Medio, Distancia entre Puntos del Plano, Pendiente de un Recta, Rectas en el Plano, Lugares Geométricos, Álgebra Básica, Simplificación de Expresiones Algebraicas, Despeje.

Contenido

Definición y Elementos de Elipse, Casos de Elipse, Graficar e identificar elementos de una Elipse, Ejercicios.

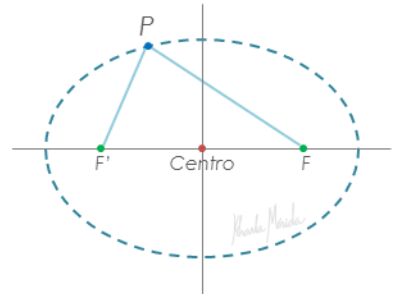
Videos Disponibles

Los guiones didácticos que aparecen en este objetivo corresponden a videos en desarrollo.

Guiones Didácticos

ELIPSE. Definición y Elementos

Elipse. Se define como el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que, la suma de su distancia a dos puntos fijos, llamados Focos, es constante. $d_{PF'} + d_{PF} = C$



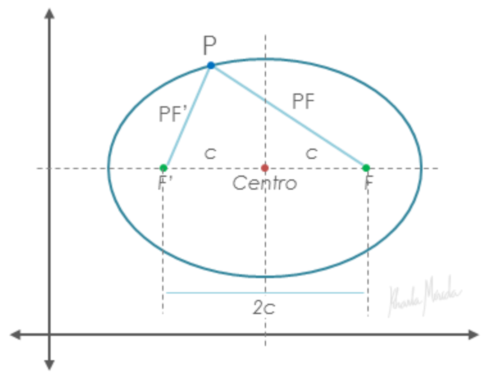
Elementos Que Definen La Elipse

Focos, F y F': Puntos fijos de la elipse, ubicados sobre la misma recta que contiene al centro y a igual distancia de éste.

Recta Focal: Recta que contiene al centro y a los focos.

Distancia Focal: Distancia entre los Focos, su medida es 2c.

Radio vectores: Segmentos, PF y PF', que van del punto P(x , y) a los Focos, F y F'.

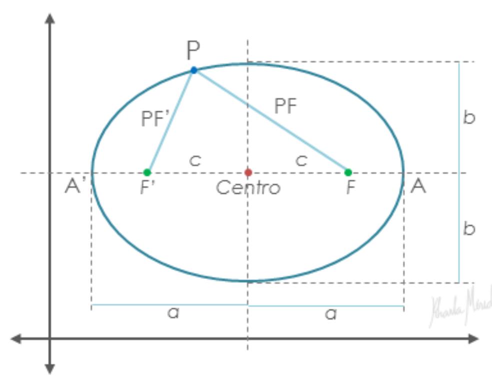


Para un punto cualquiera de la Elipse, P(x , y), se cumple que

$$|PF'| + |PF| = 2a$$

Esto se lee: La suma de las distancias PF y PF' es 2a.

Lo que establece la definición de Elipse como lugar geométrico.



Eje mayor de la Elipse, AA': Segmento más largo entre dos puntos de la Elipse, su longitud es 2a.

Eje menor de la Elipse, BB': Segmento más corto entre dos puntos de la Elipse, su longitud es 2b.

Deducción de la Ecuación de la Elipse

Partimos de la definición de elipse como lugar geométrico:

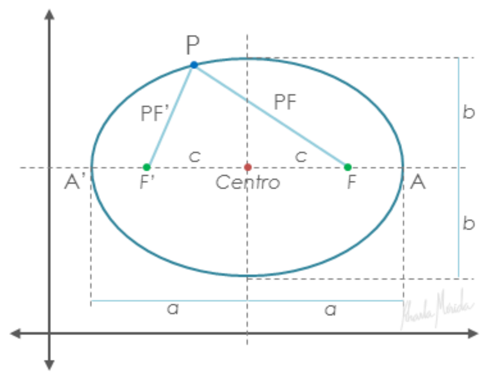
Es el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que, la suma de su distancia a dos puntos fijos, llamados focos, es constante e igual a 2a.

$$|PF'| + |PF| = 2a$$

Para simplificar los procedimientos, consideraremos que el centro de la elipse se ubica en el origen de coordenadas, C(0 , 0).

Entonces, las coordenadas de los focos son:

F'(-c , 0) y F(c , 0)



Aplicamos la fórmula de distancia a las distancias indicadas en la definición.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distancias PF' y PF:

$$PF' = \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} \qquad PF = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$$

Sustituimos las distancias en la definición de Elipse

$$|PF'| + |PF| = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

Pasamos una de las raíces al otro lado de la igualdad, y elevamos ambos lados de la igualdad.

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$$

$$\left(\cancel{\sqrt{}}(x + c)^2 + y^2\right)^{\cancel{2}} = \left(2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right)^2$$

Simplificamos el cuadrado con la raíz en el primer lado de la igualdad, y desarrollamos el cuadrado de la diferencia en el segundo lado de la igualdad.

$$(x + c)^2 + y^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \left(\cancel{\sqrt{}}(x - c)^2 + y^2\right)^{\cancel{2}}$$

Desarrollamos el cuadrado de la suma en el primer lado de la igualdad, Simplificamos el cuadrado con la raíz en el segundo lado de la igualdad.

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = (2a)^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

Distribuimos la potencia $(2a)^2$ y desarrollamos el cuadrado de la diferencia $(x - c)^2$ en el segundo lado de la igualdad.

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

Simplificamos los términos iguales que se encuentran a ambos lados de la igualdad.

$$\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc$$

Pasamos el término con la raíz al primer lado de la igualdad, y el término 2xc al segundo lado de la igualdad, y sumamos los términos semejantes 2xc.

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 2xc - 2xc$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc$$

Dividimos todos los términos de la igualdad entre 4.

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

Elevamos ambos lados de la igualdad al cuadrado, para eliminar la raíz.

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(a^2 - xc\right)^2 \longrightarrow a^2\left((x-c)^2 + y^2\right) = \left(a^2 - xc\right)^2$$

Aplicamos distributiva de a^2 y desarrollamos producto notable.

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

Desarrollamos productos notables, y aplicamos distributiva de a^2.

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2) + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - \cancel{2a^2xc} + x^2c^2$$

Simplificamos términos iguales $-2a^2xc$ de ambos lados de la igualdad.

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2$$

Reunimos todos los términos con x o y en el primer lado de la igualdad y los demás en el segundo lado de la igualdad.

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

Sacamos x^2 factor común en los primeros dos términos del primer lado de la igualdad y c^2 de los términos del segundo lado de la igualdad.

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

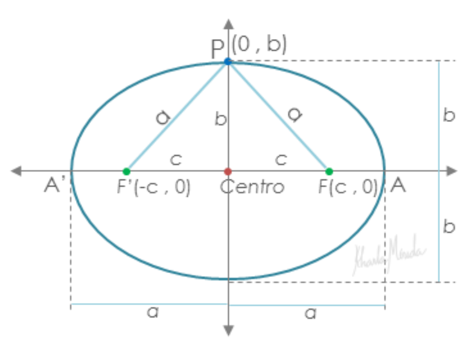
El caso particular en el que P tiene como coordenadas (0 , b) nos permite hallar la relación:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

De esa relación despejamos b^2

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Nota: la diferencia de cuadrados $a^2 - c^2$ está en la ecuación de la elipse que hemos deducido.



Sustituyendo $a^2 - c^2$ por b^2 en la ecuación de la elipse

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right) \longrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividimos todos los términos de la igualdad entre b^2a^2

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \longrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación Canónica de la Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ecuación de la Elipse con Centro (h , k) $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Ecuación General de la Elipse $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$

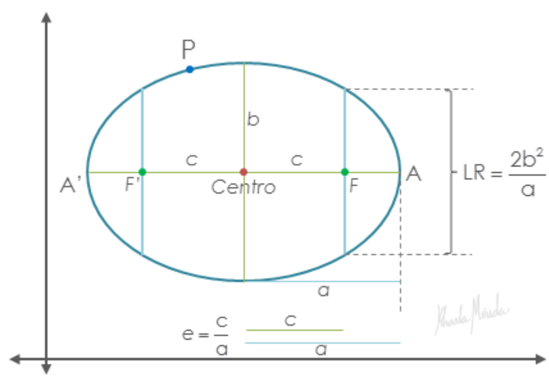
Elementos Notables de la Elipse

Lado Recto, LR: Longitud de las cuerdas de la elipse que pasan por un foco y son perpendiculares al eje focal.

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

Excentricidad, e: Es la razón de la distancia del centro a un foco, c, entre la longitud del semieje mayor, a.

$$e = \frac{c}{a}$$



Nota: como c es una longitud menor que a en la elipse, la razón c/a es menor que 1.

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

c es una longitud menor que a en la elipse, la razón c/a es menor que 1.

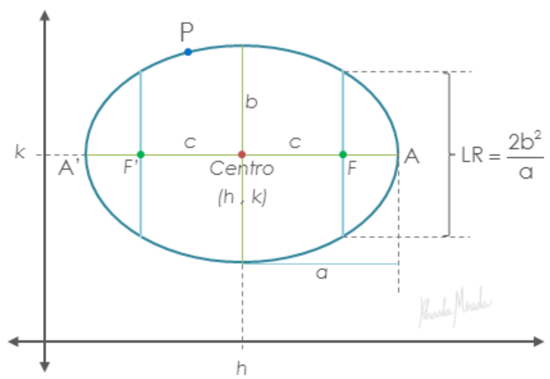
ELIPSE. Casos

Caso 1. Elipse Horizontal

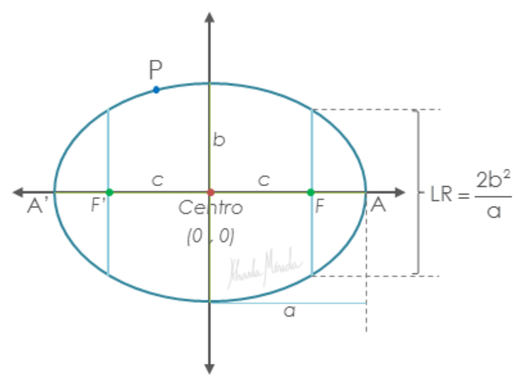
Cuando el mayor denominador es el que corresponde a la variable "x" se trata de una elipse con eje focal horizontal. De modo que es más ancha que alta.

Esto aplica a las de centro (h , k) o las de centro en el origen de coordenadas.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



Centro: C(h , k)

Focos: F'(h – c , k) ; F(h + c , k)

Vértices: A'(h – a , k) ; A(h + a , k)

Lado Recto, LR: $LR=\frac{2b^2}{a}$

Excentricidad, e: $e=\frac{c}{a}$

Centro: C(0 , 0)

Focos: F'(-c , 0) ; F(c , 0)

Vértices: A'(-a , 0) ; A(a , 0)

Lado Recto, LR: $LR=\frac{2b^2}{a}$

Excentricidad, e: $e=\frac{c}{a}$

Ejemplo

Identifique los elementos notables de la elipse: $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+5)^2}{9}=1$

Nota: como el denominador mayor corresponde a "x", es una elipse horizontal.

De la ecuación sacamos:

Centro: C(2 , -5)

$a^2 = 25 \longrightarrow a = 5$

$b^2 = 9 \longrightarrow b = 3$

Aplicamos la relación para hallar c:

$b^2 + c^2 = a^2$

$c^2 = 16 \longrightarrow c = 4$

Focos: F'(-2 , -5) ; F(6 , -5)

Vértices: A'(-3 , -5) ; A(7 , -5)

Lado Recto, LR: $LR=\frac{2b^2}{a}$ $\qquad LR=\frac{18}{5}$

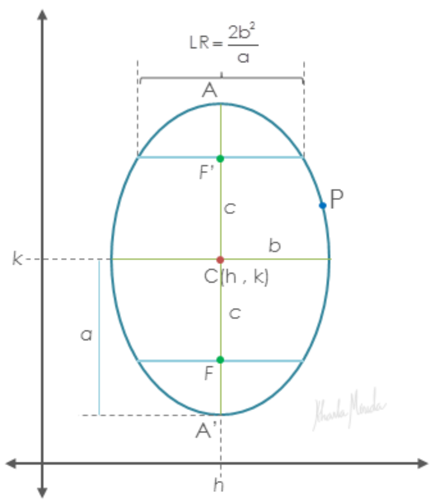
Excentricidad, e: $e=\frac{c}{a}$ $\qquad e=\frac{4}{5}$

Caso 2. Elipse Vertical

Cuando el mayor denominador es el que corresponde a la variable “y” se trata de una elipse con eje focal vertical. De modo que es más alta que ancha.

Esto aplica a las de centro (h , k) o las de centro en el origen de coordenadas.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$



Centro: C(h , k)

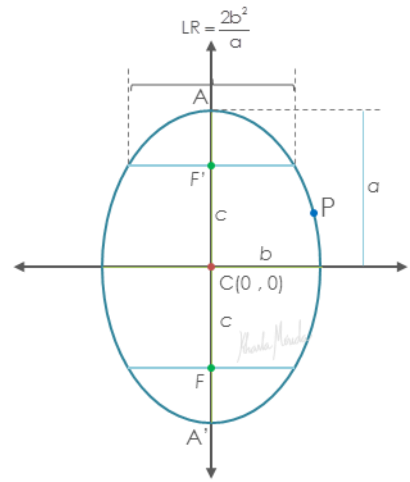
Focos: F’(h , k – c) ; F(h , k + c)

Vértices: A’(h – a , k) ; A(h + a , k)

Lado Recto, LR: $LR=\frac{2b^2}{a}$

Excentricidad, e: $e=\frac{c}{a}$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



Centro: C(0 , 0)

Focos: F’(0 , -c) ; F(0 , c)

Vértices: A’(0 , -a) ; A(0 , a)

Lado Recto, LR: $LR=\frac{2b^2}{a}$

Excentricidad, e: $e=\frac{c}{a}$

ELIPSE. Graficar e identificar elementos de una Elipse. Ejercicio 1

Graficar la elipse de ecuación $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$, indicando sus elementos.

Lo primero que debemos hacer es llevar la ecuación a la forma de ecuación con centro (h , k).

Agrupamos los términos de "x" y los términos de "y".

$$(25x^2 + 100x) + (16y^2 - 96y) - 156 = 0$$

Sacamos factores comunes numéricos de ambas agrupaciones

$$25(x^2 + 4x) + 16(y^2 - 6y) - 156 = 0$$

Completamos TCP en cada agrupación.

$$25(x^2 + 4x + 4 - 4) + 16(y^2 - 6y + 9 - 9) - 156 = 0$$

Sacamos los términos que restan en cada paréntesis, dejando solo los TCP

$$25(x^2 + 4x + 4) - 100 + 16(y^2 - 6y + 9) - 144 - 156 = 0$$

Efectuamos la suma de términos independientes.

$$25(x^2 + 4x + 4) + 16(y^2 - 6y + 9) - 400 = 0$$

Factorizamos los TCP

$$25(x + 2)^2 + 16(y - 3)^2 - 400 = 0$$

Pasamos el término independiente al otro lado de la igualdad.

$$25(x + 2)^2 + 16(y - 3)^2 = 400$$

Dividimos todos los términos entre 400 para igualar a 1.

$$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$

De la ecuación sacamos:

Centro: C(-2 , 3)

$a^2 = 25 \longrightarrow a = 5$

$b^2 = 16 \longrightarrow b = 4$

Aplicamos la relación para hallar c:

$b^2 + c^2 = a^2$

$c^2 = 9 \longrightarrow c = 3$

Focos: F'(-2 , 0) ; F(-2 , 6)

Vértices: A'(-2 , -2) ; A(-2 , 8)

Lado Recto, LR: $LR = \frac{2b^2}{a}$ $\qquad LR = \frac{32}{5}$

Excentricidad, e: $e = \frac{c}{a}$ $\qquad e = \frac{4}{5}$

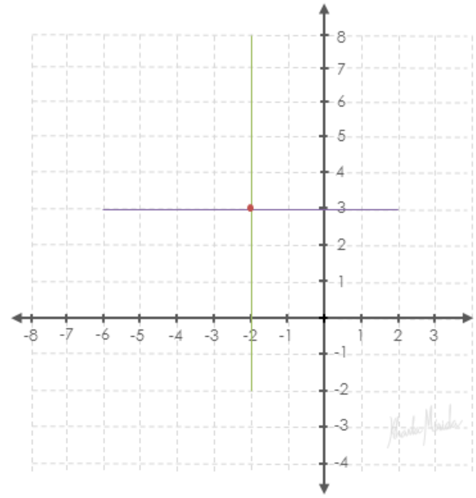
Con estos valores tenemos información suficiente para trazar el gráfico representativo de esta elipse.

Ubicamos el centro y trazamos los segmentos correspondientes a los ejes mayor y menor.

Centro: C(-2 , 3)

Para el eje mayor, sabemos que a = 5, partimos del centro, extendemos 5 unidades hacia arriba y 5 unidades hacia abajo.

Para el eje menor, sabemos que b = 4, partimos del centro, extendemos 4 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia la izquierda.

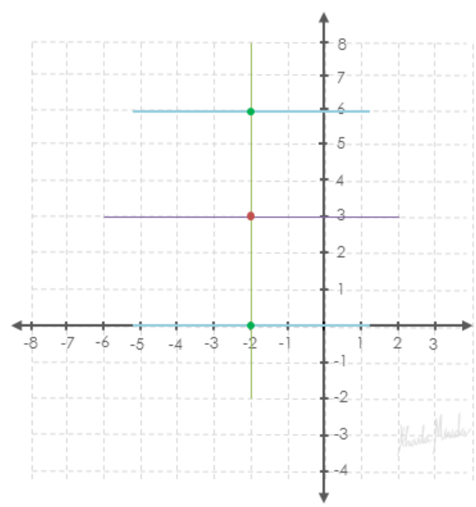


Ubicamos los focos y trazamos los segmentos correspondientes a los lados rectos.

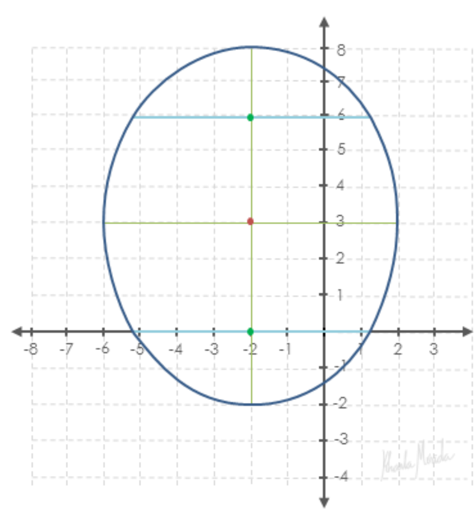
Focos: F'(-2 , 0) ; F(-2 , 6)

Lado Recto, LR: $LR = \frac{32}{5} = 6,4$

Para representar el lado recto partimos de los focos y extendemos segmentos midiendo la mitad del lado recto, 3,2, a la derecha y a la izquierda.



Trazamos la elipse uniendo los puntos extremos de los ejes y lados rectos.



ELIPSE. Graficar e identificar elementos de una Elipse. Ejercicio 2

Graficar la elipse de Focos F'(-5 , 0) y F(5 , 0), cuyo semieje mayor mide 7, indicando cada uno de sus elementos.

Con los focos obtenemos dos datos valiosos, uno es que el centro es (0 , 0) y el otro es que c = 5. Y el enunciado nos da el valor de a = 7.

Focos: F'(-5 , 0) ; F(5 , 0) **Centro:** C(0 , 0) c = 5 , a = 7

Aplicamos la relación para hallar b:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$b^2 = 24 \longrightarrow b = 2\sqrt{6}$$

Hallamos la medida del Lado Recto, LR:

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

$$LR = \frac{48}{7} \approx 6{,}86$$

Tenemos información suficiente para trazar el gráfico representativo de esta elipse.

Ubicamos los Focos y Vértices

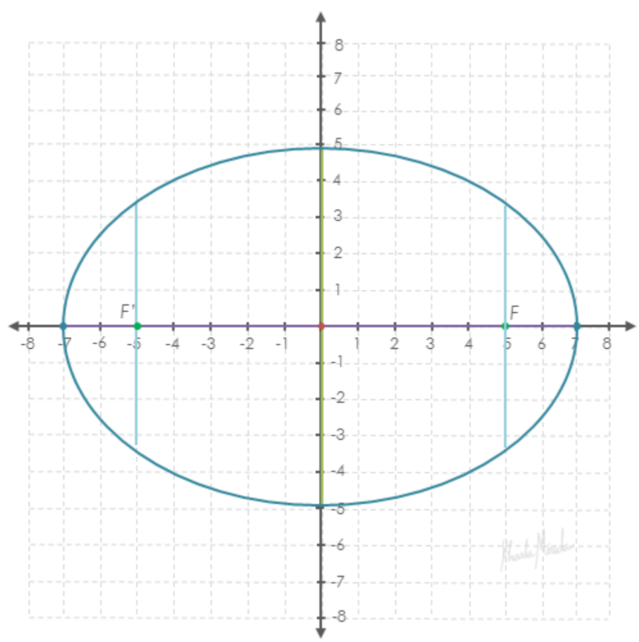
Focos: F'(-5 , 0) ; F(5 , 0)

Vértices: A'(-7 , 0) ; A(7 , 0)

Los extremos del semieje menor están ubicados en $y = -2\sqrt{6}$ y $y = -2\sqrt{6}$.

Para representar el lado recto partimos de los focos y extendemos segmentos midiendo la mitad del lado recto, 3,43, hacia arriba y hacia abajo.

Trazamos la elipse uniendo los puntos extremos de los ejes y lados rectos.



ELIPSE. Aplicación a situaciones reales. Ejercicio 1

En un velódromo de forma elíptica entrena un ciclista para una competencia próxima. El entrenador chequea su rendimiento ubicado en el centro. El semieje mayor de la pista mide 100m, y el semieje menor mide 25m. ¿A qué distancia del entrenador se encuentra cuando pasa por un punto que se proyecta perpendicularmente hacia un foco?

Idea Gráfica

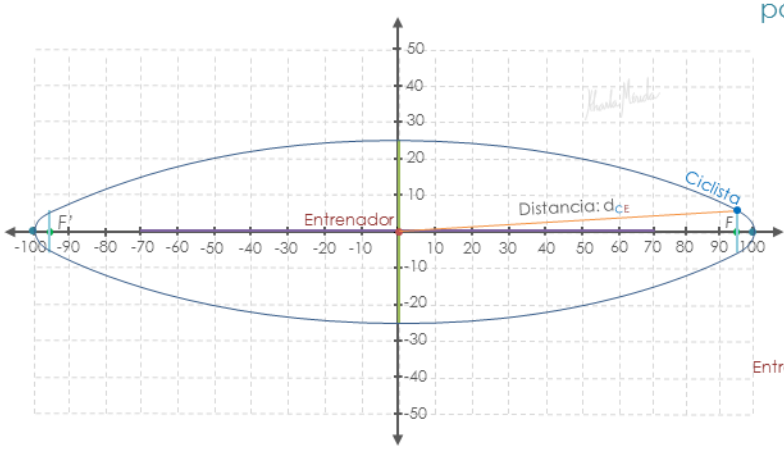
Semieje mayor, $a = 100$

Semieje menor, $b = 25$

Aplicamos la relación $b^2 + c^2 = a^2$ para hallar c:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 9375 \longrightarrow c = 96{,}8$$



$$LR = \frac{2b^2}{a} \qquad LR = \frac{1250}{100} = 12{,}5$$

El segmento que va del punto donde está el entrenador al punto por donde va el ciclista es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya base la medida de c = 96,8 y la altura es la mitad del lado recto, 6,25.

Aplicamos Pitágoras $\quad \text{Base}^2 + \text{Altura}^2 = CE^2$

Sustituimos los valores conocidos $\quad (96{,}8)^2 + (6{,}25)^2 = CE^2$

Despejamos la distancia CE $\quad CE^2 = (96{,}8)^2 + (6{,}25)^2$

$$CE^2 = 9412{,}5$$

$$CE = 97{,}02$$

En ese punto la distancia que separa al ciclista del entrenador es 97,02 m

Emparejando el Lenguaje

Elipse. Se define como el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que, la suma de su distancia a dos puntos fijos, llamados Focos, es constante. $d_{PF'} + d_{PF} = C$

A Practicar

Indica en cada caso si la Elipse es horizontal o vertical, coordenadas del centro y la medida de los ejes mayor y menor.

1. $36x^2 + 9y^2 = 36$
2. $9x^2 + 16y^2 = 144$
3. $25(x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 100$
4. $(x + 3)^2 + 4(y - 1)^2 = 4$

Expresar las siguientes curvas en forma reducida

5. $x^2 + 4y^2 - 2x = 3$
6. $2x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$

Hallar la ecuación en forma reducida y graficar las siguientes elipses de centro en el origen:

7. La distancia del centro al foco es 7, y contiene al punto P(25 , 0)
8. Contiene al punto (4 , 0), y sus Focos son los puntos (-7 , 0) y (7 , 0).

Lo Hicimos Bien?

Indica en cada caso si la Elipse es horizontal o vertical, coordenadas del centro y la medida de los ejes mayor y menor.

1. Vertical, C(0 , 0) , 2a = 4 , 2b = 2
2. Horizontal, C(0 , 0) , 2a = 8 , 2b = 6
3. Vertical, C(2 , -1) , 2a = 10 , 2b = 4
4. Horizontal, C(-3 , 1) , 2a = 4 , 2b = 2

Expresar las siguientes curvas en forma reducida

5. $\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$
6. $(x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{2} = 1$

Hallar la ecuación en forma reducida y graficar las siguientes elipses de centro en el origen:

7. $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} = 1$
8. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$