6

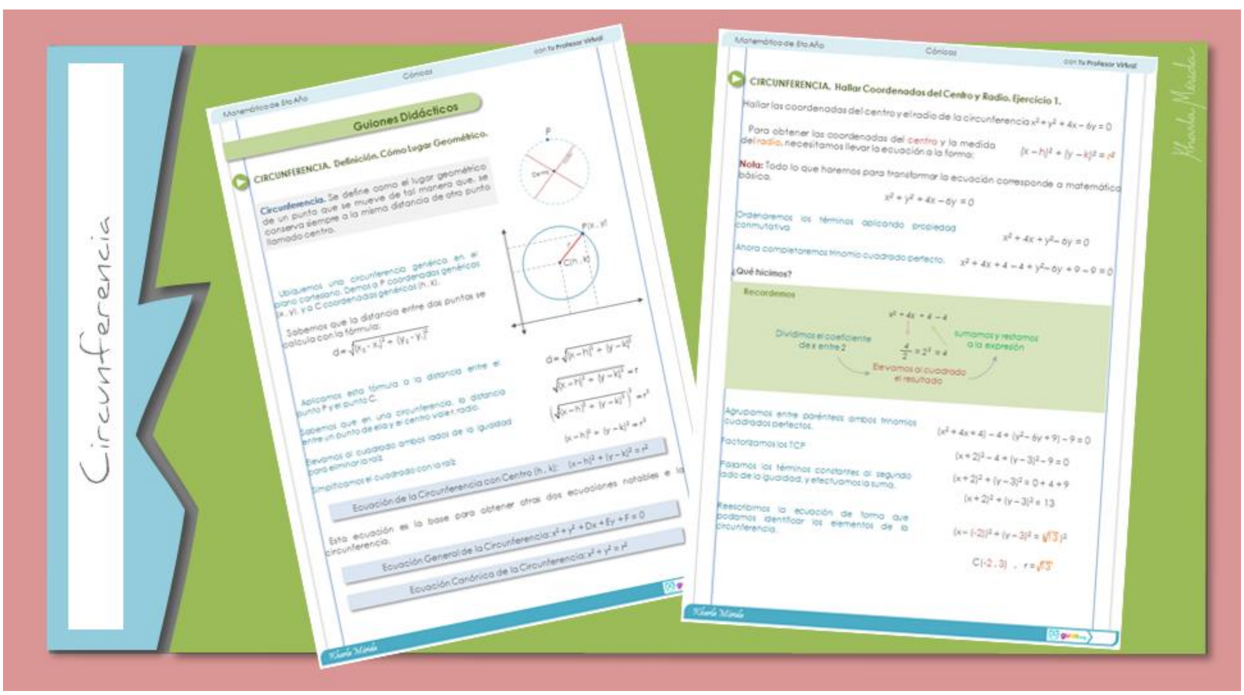
6ta Unidad

Cónicas

6.2 Circunferencia.

Generar ideas es un proceso audaz, que requiere asumir con convicción lo diferente de nuestra forma de ver el mundo.

Descripción



Esta sección nos lleva desde conceptos físicos fundamentales, que serán el soporte para entender y manejar cada concepto, propiedad y ley física del resto de nuestros estudios en esta área, hasta ejercicios de conversión de unidades que sirvan de referencia para desarrollar nuestra práctica con satisfacción.

Al final cuentas con un grupo de ejercicios propuestos, y sus respuestas, para que complementes la información teórica-práctica recibida, con la oportunidad de ponerte en acción para fijarla en tu mente.

Conocimientos Previos Requeridos

Plano Cartesiano, Punto Medio, Distancia entre Puntos del Plano, Pendiente de un Recta, Rectas en el Plano, Lugares Geométricos, Álgebra Básica, Simplificación de Expresiones Algebraicas, Despeje.

Contenido

Definición de Circunferencia, Hallar Coordenadas del Centro y Radio, Hallar la Ecuación de la Circunferencia, Hallar Punto de Corte o Intersección, Recta Tangente a una circunferencia, Ejercicios.

Videos Disponibles

CIRCUNFERENCIA. Definición. Como lugar Geométrico

CIRCUNFERENCIA. Hallar Coordenadas del Centro y Radio. Ejercicio 1

CIRCUNFERENCIA. Hallar Coordenadas del Centro y Radio. Ejercicio 2

CIRCUNFERENCIA. Hallar la Ecuación de la Circunferencia. Ejercicio 1

CIRCUNFERENCIA. Hallar la Ecuación de la Circunferencia. Ejercicio 2

CIRCUNFERENCIA. Hallar Punto de Corte o Intersección. Ejercicio 1

CIRCUNFERENCIA. Hallar Punto de Corte o Intersección. Ejercicio 2

CIRCUNFERENCIA. Hallar Punto de Corte o Intersección. Ejercicio 3

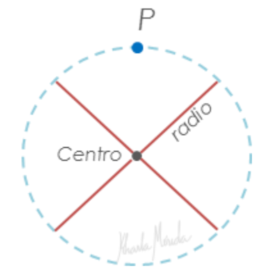
CIRCUNFERENCIA. Recta Tangente a una circunferencia. Ejercicio 1

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para familiarizarse con los conceptos nuevos y fortalecer el lenguaje operativo.

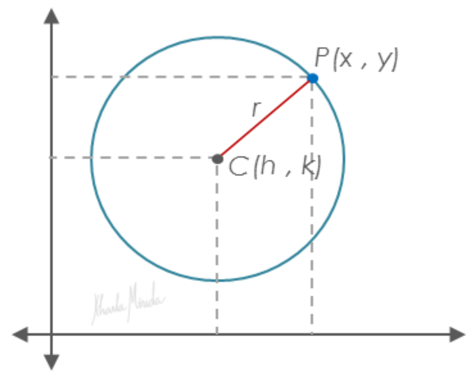
Guiones Didácticos

CIRCUNFERENCIA. Definición. Cómo Lugar Geométrico.

Circunferencia. Se define como el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que, se conserva siempre a la misma distancia de otro punto llamado centro.



Ubiquemos una circunferencia genérica en el plano cartesiano. Demos a P coordenadas genéricas (x , y), y a C coordenadas genéricas (h , k).



Sabemos que la distancia entre dos puntos se calcula con la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Aplicamos esta fórmula a la distancia entre el punto P y el punto C.

$$d = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Sabemos que en una circunferencia, la distancia entre un punto de ella y el centro vale r, radio.

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad para eliminar la raíz

$$\left(\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}\right)^2 = r^2$$

Simplificamos el cuadrado con la raíz

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Ecuación de la Circunferencia con Centro (h , k): $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Esta ecuación es la base para obtener otras dos ecuaciones notables e la circunferencia.

Ecuación General de la Circunferencia: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Ecuación Canónica de la Circunferencia: $x^2 + y^2 = r^2$

CIRCUNFERENCIA. Hallar Coordenadas del Centro y Radio. Ejercicio 1.

Hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$

Para obtener las coordenadas del centro y la medida del radio, necesitamos llevar la ecuación a la forma:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Nota: Todo lo que haremos para transformar la ecuación corresponde a matemática básica.

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$$

Ordenaremos los términos aplicando propiedad conmutativa

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 0$$

Ahora completaremos trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 = 0$$

¿Qué hicimos?

Recordemos

$$x^2 + 4x + 4 - 4$$

Dividimos el coeficiente de x entre 2

$$\frac{4}{2} = 2^2 = 4$$

Elevamos al cuadrado el resultado

sumamos y restamos a la expresión

Agrupamos entre paréntesis ambos trinomios cuadrados perfectos.

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 = 0$$

Factorizamos los TCP

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 = 0$$

Pasamos los términos constantes al segundo lado de la igualdad, y efectuamos la suma.

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0 + 4 + 9$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$$

Reescribimos la ecuación de forma que podamos identificar los elementos de la circunferencia.

$$(x - (-2))^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{13})^2$$

$$C(-2 , 3) \quad , \quad r = \sqrt{13}$$

CIRCUNFERENCIA. Hallar Coordenadas del Centro y Radio. Ejercicio 2.

Hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia:

$$4x^2 + 4y^2 + 24x - 40y - 8 = 0$$

Para obtener las coordenadas del centro y la medida del radio, necesitamos llevar la ecuación a la forma:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ordenamos los términos agrupando primero los que contienen x, luego los que contienen y, y por último los términos independientes.

$$4x^2 + 4y^2 + 24x - 40y - 8 = 0$$

$$(4x^2 + 24x) + (4y^2 - 40y) - 8 = 0$$

Escribimos 24 como $4 \cdot 6$ y 40 como $4 \cdot 10$.

$$(4x^2 + 4 \cdot 6\,x) + (4y^2 - 4 \cdot 10y) - 8 = 0$$

Tenemos 4 factor común, en ambos paréntesis

$$4(x^2 + 6x) + 4(y^2 - 10y) - 8 = 0$$

Completamos TCP para las "x" y para las "y"

$$4(x^2 + 6x + 9 - 9) + 4(y^2 - 10y + 25 - 25) - 8 = 0$$

Nota: puedes revisar cómo factorizar TCP en la sección de factorización en tuprofesorvirtual.com

Liberamos los términos -9 y -25 de cada paréntesis, multiplicando por 4, y factorizamos el TCP.

$$4(x^2 + 6x + 9 - 9) = 4(x^2 + 6x + 9) - 36$$

$$4(y^2 - 10y + 25 - 25) = 4(y^2 - 10y + 25) - 100$$

$$4(x + 3)^2 - 36 + 4(y - 5)^2 - 100 - 8 = 0$$

Dejamos los cuadrados en el primer lado de la igualdad y los términos independientes en el segundo lado de la igualdad.

$$4(x + 3)^2 + 4(y - 5)^2 = 36 + 100 + 8$$

Dividimos todos los términos entre 4.

$$\frac{4(x + 3)^2}{4} + \frac{4(y - 5)^2}{4} = \frac{144}{4}$$

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 36$$

Escribimos 36 como 6^2.

$$(x - (-3))^2 + (y - 5)^2 = 6^2$$

$$C = (-3\,,\,5) \quad , \quad r = 6$$

$$\boxed{C = (3\,,\,5) \quad , \quad r = 6}$$

CIRCUNFERENCIA. Hallar la Ecuación de la Circunferencia. Ejercicio 1.

Hallar la ecuación de una circunferencia que tiene como extremos de uno de sus diámetros los puntos A(-2 , 5) y B(4 , -3).

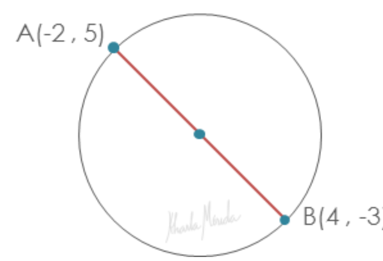
Interpretación de Enunciado

"**Hallar la ecuación de una circunferencia**", si no dicen cuál ecuación desean se entrega el resultado en la **forma general** de la ecuación de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

"**que tiene como extremos de uno de sus diámetros los puntos A(-2 , 5) y B(4 , -3)**", el centro es el punto medio de los puntos extremos.

Idea Gráfica



Hallamos el punto medio aplicando la fórmula

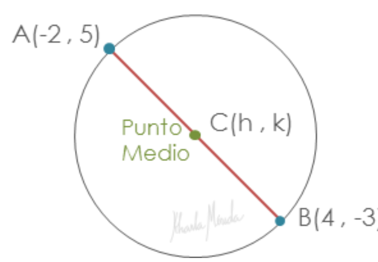
$$P_m\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right) \qquad A(-2 , 5) \quad B(4 , -3)$$

Sustituyendo las coordenadas $P_m\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5+(-3)}{2}\right)$

Simplificando cada coordenada $P_m\,(1 , 1)$

El punto medio es el centro de la circunferencia $P_m\,(1 , 1) \rightarrow C(1 , 1)$

Idea Gráfica



Sabemos que **la distancia desde el centro a un punto de la circunferencia es el radio**, r. Conociendo el valor del radio y las coordenadas del centro podemos aplicar la ecuación de la circunferencia.

Hallamos el radio aplicando la fórmula a los puntos A y C.

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad A(-2 , 5) \quad C(1 , 1)$$

$$r = \sqrt{(1-(-2))^2 + (1-5)^2}$$

Efectuando las potencias y operaciones

$$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2}$$

$$r = \sqrt{9+16} \qquad r = \sqrt{25}$$

$$\boxed{r = 5}$$

Aplicamos la fórmula de coordenadas del centro y radio

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$$

Desarrollamos los productos notables

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 25$$

Reunimos todos los términos en el primer lado de la igualdad y simplificando.

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + 1 - 25 = 0$$

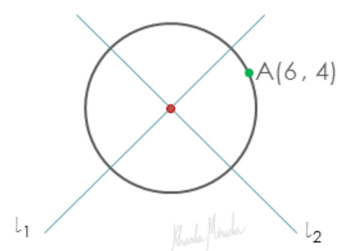
$$\boxed{Ec \equiv x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0}$$

CIRCUNFERENCIA. Hallar la Ecuación de la Circunferencia. Ejercicio 2.

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A(6 , 4) y tiene su centro en el punto de intersección de las rectas $\ell_1 \equiv x + y - 3 = 0$, $\ell_2 \equiv x - y - 1 = 0$.

Interpretación de Enunciado

Idea Gráfica



"**Hallar la ecuación de una circunferencia**", si no dicen cuál ecuación desean se entrega el resultado en la **forma general** de la ecuación de la circunferencia.

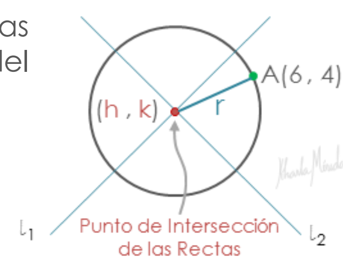
$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

"**que pasa por el punto A(6 , 4)**", esto nos da un par de coordenadas conocidas para (x , y) de la circunferencia.

Para hallar la ecuación de una circunferencia aplicando la ecuación básica necesitamos las coordenadas del centro, y la medida del radio.

(h , k) y r

Idea Gráfica



Nota: Las coordenadas del punto (x , y) donde se cruzan las dos rectas dadas corresponden a las coordenadas (h , k) del centro de la circunferencia.

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} h + k - 3 = 0 \\ h - k - 1 = 0 \end{cases}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. En el objetivo **10.1 Ecuaciones. Sistema de Ecuaciones** aprendimos cómo resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Método de reducción

los coeficientes de k son opuestos es decir, una tiene coeficiente 1, y la otra coeficiente -1.

$$\begin{cases} h + k - 3 = 0 \\ h - k - 1 = 0 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones directamente para simplificar k

$$\begin{cases} h + k - 3 = 0 \\ h - k - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\overline{2h \quad - 4 = 0}$$

Despejamos h

$$2h = 4 \qquad \boxed{h = 2}$$

Sustituimos el valor de h en la segunda (o en la primera) ecuación

$$h - k - 1 = 0 \qquad h = 2$$

$$2 - k - 1 = 0$$

Despejamos k

$$\boxed{k = 1}$$

Hallamos el radio aplicando la fórmula a los puntos A y C.

$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ A(6 , 4) C(2 , 1)

$r = \sqrt{(2-6)^2 + (1-4)^2}$

Efectuando las potencias y operaciones

$r = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$

$r = \sqrt{16 + 9}$ $r = \sqrt{25}$

$r = 5$

Aplicamos la fórmula de coordenadas del centro y radio

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$

Desarrollamos los productos notables

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 25$

Reunimos todos los términos en el primer lado de la igualdad y simplificando.

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 + 1 - 25 = 0$

$Ec \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

CIRCUNFERENCIA. Hallar Punto de Corte o Intersección. Ejercicio 1.

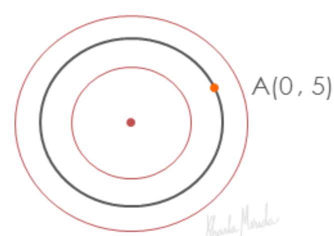
Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A(0 , 5) y es concéntrica con la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 7 = 0$.

Interpretación de Enunciado

"**Determinar la ecuación de la circunferencia**", si no dicen cuál ecuación desean se entrega el resultado en la **forma general** de la ecuación de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Idea Gráfica



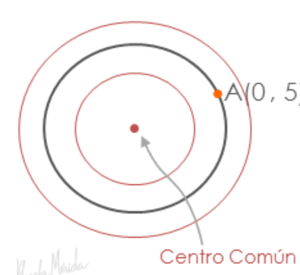
"**que pasa por el punto A(0 , 5)**", esto nos da un par de coordenadas conocidas para (x , y) de la circunferencia.

"**y es concéntrica con la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 7 = 0$**", ser concéntricas significa que tienen el mismo centro.

Conocemos:

- Un punto de la circunferencia
- Que el centro de la circunferencia es común al de la circunferencia dada. Obteniendo el centro de la circunferencia dada, tenemos también el centro de la circunferencia que debemos hallar.

Idea Gráfica



Para obtener el centro de la circunferencia dada, llevaremos a la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Aplicamos el procedimiento presentado en los ejercicios 1 y 2, esto es, hallar el centro y radio de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y - 7 = 0$$

Reordenamos los términos dejando los que contienen x juntos y los que contienen y juntos, y de último el término independiente.

$$x^2 - 4x + y^2 + 10y - 7 = 0$$

Completaremos trinomio cuadrado perfecto para la variable x y completamos trinomio cuadrado perfecto para la variable y. El término independiente queda igual.

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 10y + 25 - 25 - 7 = 0$$

Agregamos y quitamos los valores que completan cada TCP, para el caso de la "x" 4, para el caso de la "y" 25.

Nota: puedes revisar las lecciones de factorización de trinomios cuadrados perfectos en el objetivo **7.3 Factorización. Trinomios Cuadrados. Parte I**, de matemática de 2do año, 3er lapso, para recordar cómo realizar el procedimiento.

Agrupamos ambos TCP y pasamos los términos independientes al otro lado

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 10y + 25) = 4 + 25 + 7$$

Factorizamos ambos TCP

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 36$$

Reescribimos de forma que se visualicen las coordenadas del centro y el radio.

$$(x - 2)^2 + (y - (-5))^2 = 36$$

Centro común a ambas circunferencias

$$C(2 , -5)$$

Ahora, conociendo el centro y un punto de la circunferencia podemos hallar el radio aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos.

Centro de la circunferencia dada C(2 , -5)

Punto de la circunferencia A(0 , 5)

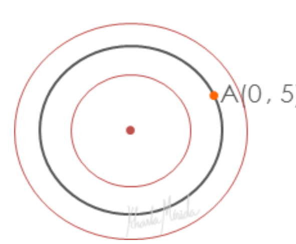
$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-5 - 5)^2}$$

$$r = \sqrt{4 + 100}$$

$$\boxed{r = \sqrt{104}}$$

Idea Gráfica



Tenemos el centro y el radio podemos aplicar la ecuación fundamental de la circunferencia para llegar a la ecuación general de la circunferencia pedida.

$C(2\ ,\ -5)$ $r = \sqrt{104}$ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Sustituimos las coordenadas del centro y radio $(x - 2)^2 + (y - (-5))^2 = (\sqrt{104})^2$

Escribimos la resta del segundo paréntesis como una suma y efectuamos la potencia $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 104$

desarrollamos los productos notables $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = 104$

Escribimos primeros los términos cuadráticos luego los términos de grado uno luego todos los términos independientes. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 4 + 25 = 104$

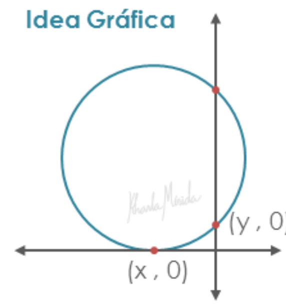
Simplificamos términos semejantes $\boxed{x^2 + y^2 - 4x + 10y - 75 = 0}$

CIRCUNFERENCIA. Hallar Punto de Corte o Intersección. Ejercicio 2.

Determinar los puntos donde la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$ corta a los ejes coordenados.

Recordemos. Los puntos que están sobre el eje x tienen como valor de la ordenada cero (y = 0), y los puntos que están ubicados sobre el eje y tienen como valor de la abscisa cero (x = 0).

Idea Gráfica



Sustituimos y = 0 en la ecuación para obtener los valores de x donde la circunferencia intersecta al eje x. $x^2 + 0^2 + 6x - 8 \cdot 0 + 9 = 0$

Llegamos a una ecuación de 2do grado $x^2 + 6x + 9 = 0$

Podemos resolver ecuaciones de 2do grado factorizando la expresión y hallando las raíces de cada factor, o aplicando la fórmula resolvente. En esta lección aplicaremos la primera opción, Factorización.

Factorizamos el TCP $(x + 3)^2 = 0$

Para que la potencia sea cero, es necesario que la base sea cero. $x + 3 = 0$

$x = -3$

$\boxed{\text{Corta con eje x en } x = -3}$

Sustituimos $x = 0$ en la ecuación para obtener los valores de y donde la circunferencia intersecta al eje y.

$$0^2 + y^2 + 6 \cdot 0 - 8y + 9 = 0$$

Llegamos a una ecuación de 2do grado

$$y^2 - 8y + 9 = 0$$

Este trinomio no es cuadrado perfecto, ni existen dos números enteros que multiplicados den 9 y sumados den 8. Aplicamos la resolvente.

Sustituimos los valores de a, b y c de la ecuación.

$a = 1$, $b = -8$, $c = 9$

$$y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 9}}{2}$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 36}}{2}$$

Efectuamos las operaciones presentes en la expresión

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$y = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{2}$$

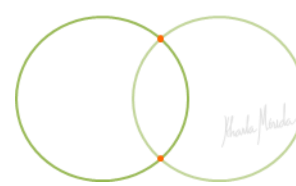
$$y = 4 \pm \sqrt{7}$$

Corta con eje y en $y = 4 - \sqrt{7}$, $y = 4 - \sqrt{7}$

CIRCUNFERENCIA. Hallar Punto de Corte o Intersección. Ejercicio 3.

Hallar los puntos de intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 1 = 0$ y $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 5 = 0$

Idea Gráfica



Tenemos dos ecuaciones de circunferencia y sabemos que estas circunferencias se intersectan, lo que significa que tienen puntos en común.

Para hallar estos puntos comunes, debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 8y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 8y + 5 = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos por -1 la 2da ecuación. Simplificamos los términos cuadrados y efectuamos la suma algebraica de los términos semejantes.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 8y - 1 = 0 \\ -x^2 - y^2 - 4x + 8y - 5 = 0 \end{cases} \\ \hline -6x \qquad -6 = 0 \end{array}$$

$-6x = 6$ $\boxed{x = -1}$

Sustituimos $x = -1$ en la 1ra ecuación

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y - 1 = 0$$

$$(-1)^2 + y^2 - 2(-1) - 8y - 1 = 0$$

$$1 + y^2 + 2 - 8y - 1 = 0$$

$$y^2 - 8y + 2 = 0$$

Aplicamos la fórmula resolvente a esta ecuación.

$a = 1$, $b = -8$ y $c = 2$

$$y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2}}{2}$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 8}}{2}$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{56}}{2}$$

$$y = \frac{8 \pm 2\sqrt{14}}{2}$$

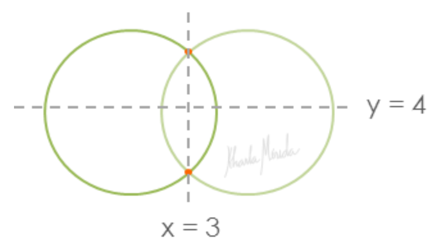
$$y = 4 \pm \sqrt{14}$$

$$y_1 = 4 - \sqrt{14} \quad , \quad y_2 = 4 - \sqrt{14}$$

Tenemos dos valores de y así que tenemos dos puntos de intersección. Ambos están ubicados sobre la vertical $x = 3$, uno por encima de $y = 4$ y otro por debajo.

$$P_1\left(3\,,\,4 + \sqrt{14}\right) \quad , \quad P_2\left(3\,,\,4 - \sqrt{14}\right)$$

Idea Gráfica

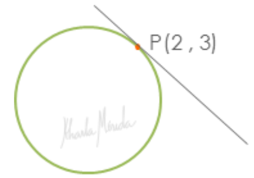


CIRCUNFERENCIA. Recta Tangente a una Circunferencia. Ejercicio 1.

Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 18 = 0$ en el punto P(2 , 3)

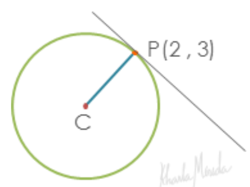
Propiedad de las Rectas Tangentes a Circunferencias. Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia.

Idea Gráfica



Condición de perpendicularidad entre Rectas. Si dos rectas son perpendiculares el producto de sus pendientes es -1.

Idea Gráfica



Condición de Perpendicularidad

Si $l_1 \perp l_2$ entonces $m_1 \cdot m_2 = -1$

Aplicamos la condición de perpendicularidad al caso planteado.

La pendiente del segmento CP por la pendiente de la recta tangente es -1

$$m_{CP} \cdot m_l = -1$$

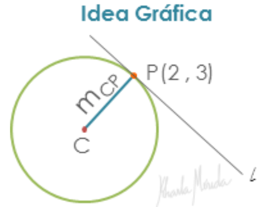
despejamos pendiente de la recta y nos queda -1 sobre pendiente CP.

$$m_l = \frac{-1}{m_{CP}}$$

Necesitamos conocer la pendiente del segmento CP para obtener la pendiente de la recta.

Por otro lado, necesitamos las coordenadas del centro, para aplicar la fórmula de pendiente entre el Centro y el punto de tangencia.

Idea Gráfica



Fórmula de Pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Escribimos la ecuación de la circunferencia dada en la forma factorizada, para hallar las coordenadas del centro.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Reordenamos los términos dejando los que contienen x juntos y los que contienen y juntos, y de último el término independiente.

$$x^2 + y^2 - 2x + 3y - 18 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 + 3y - 18 = 0$$

Completaremos trinomio cuadrado perfecto para la variable x y completamos trinomio cuadrado perfecto para la variable y. El término independiente queda igual.

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 3y + 9/4 - 9/4 - 18 = 0$$

Agrupamos los TCP y efectuamos la suma de los términos independientes.

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 3y + 9/4) - 85/4 = 0$$

Factorizamos los TCP y pasamos el término independiente al otro lado.

$$(x - 1)^2 + (y + 3/2)^2 = 85/4$$

Coordenadas del centro

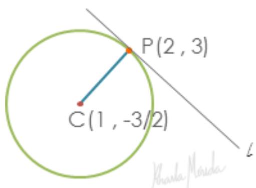
$$C(1\ ,\ -3/2)$$

Aplicamos la fórmula de pendiente con las coordenadas de C y P-

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m_{CP} = \frac{3 - (-3/2)}{2 - 1}$$

$$m_{CP} = \frac{9/2}{1}$$

$$m_{CP} = \frac{9}{2}$$



Aplicamos la condición de perpendicularidad obtenida antes

$$m_\ell = \frac{-1}{m_{CP}} \qquad m_\ell = -\frac{1}{9/2}$$

$$\boxed{m_\ell = -\frac{2}{9}}$$

Con la pendiente de la recta y el punto de tangencia, que pertenece también a la recta, hallamos la ecuación de la recta

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad P(2\ ,\ 3) \qquad m_\ell = -2/9$$

Sustituimos la pendiente y las coordenadas del punto.

$$y - 3 = -\frac{2}{9}(x - 2)$$

Multiplicamos toda la ecuación por 9 para eliminar el denominador.

$$9y - 27 = -2(x - 2)$$

Aplicamos propiedad distributiva

$$9y - 27 = -2x + 4$$

Reunimos todos los términos en el primer lado de la igualdad.

$$2x + 9y - 27 - 4 = 0$$

Simplificamos términos semejantes tenemos la ecuación de la recta tangente a la circunferencia.

$$\boxed{2x + 9y - 31 = 0}$$

Emparejando el Lenguaje

Circunferencia. Se define como el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que, se conserva siempre a la misma distancia de otro punto llamado centro.

A Practicar

1. Hallar la ecuación de la Circunferencia de centro C(-2 , -1) y radio 5.
2. Hallar la ecuación de la circunferencia sabiendo que los extremos de un diámetro son A(-3 , 5) y B(5 , 3).
3. Hallar las coordenadas de centro y radio de la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$.
4. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $l_1 \equiv x + 2y - 4 = 0$ y $l_1 \equiv 2x - y - 2 = 0$, y pasa por el punto A(2 , -1).
5. Hallar los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 9x + 12y + 20 = 0$ con los ejes coordenados.
6. Hallar los puntos de intersección entre las circunferencias $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ y $x^2 + y^2 = 1$.
7. Hallar la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ en el punto (1 , -5).

Lo Hicimos Bien?

1. $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$.
2. $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 0$.
3. $C(-3 , 2)$, $r = 6$.
4. $25x^2 + 25y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.
5. Con eje x: $x = 5$, $x = 4$, Con eje y: $y = -10$, $y = -2$.
6. $(1{,}95 \ , \ 0{,}825)$, $(0{,}35 \ , \ 4{,}275)$.
7. $2x - 7y + 37 = 0$.