

Círculo trigonométrico

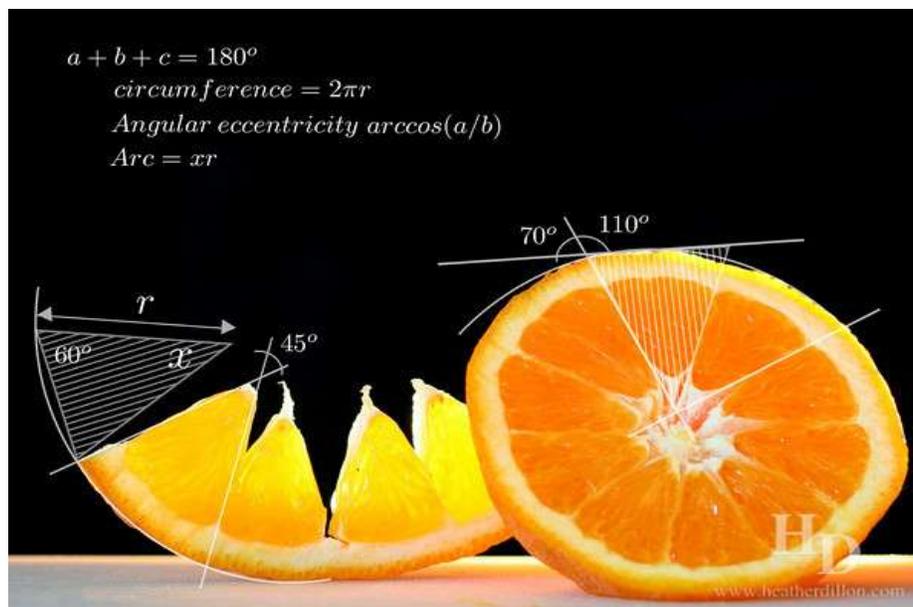
MARCO TEORICO

Para extender las definiciones de las razones trigonométricas a ángulos de cualquier medida, se considera un sistema de coordenadas cartesianas de origen $O(0,0)$ y una circunferencia, de radio 1, cuyo centro es el origen $O(0,0)$. A esta circunferencia se le denomina circunferencia trigonométrica o circunferencia unitaria y también círculo trigonométrico.

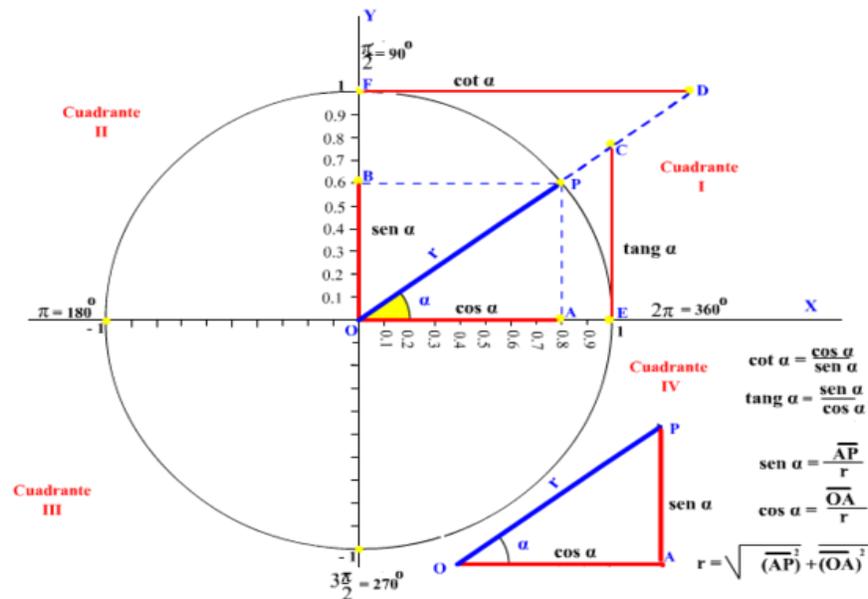
Si consideramos un punto $P(a,b)$ en la circunferencia $C(0,1)$, observamos que se puede recorrer la circunferencia en dos sentidos: el sentido positivo (+) o contrario a las agujas del reloj, y el sentido negativo (-) o de las agujas del reloj. Podemos entonces hablar de ángulos orientados, que simbolizamos con una flechita que va desde el lado inicial hasta el lado final del mismo.

Una circunferencia de radio r , y centro el punto $Q(a, b)$ se denota por $C(Q,r)$

El círculo trigonométrico, o gonio métrico, es aquel círculo cuyo centro coincide con el origen de coordenadas del plano cartesiano y cuyo radio mide la unidad. El círculo trigonométrico tiene la ventaja de ser una herramienta práctica en el manejo de los conceptos de trigonometría, pero al mismo tiempo es un apoyo teórico, pues ayuda a fundamentar y tener una idea precisa y formal de las funciones trigonométricas. A través del círculo trigonométrico se puede obtener de forma manual o analítica el valor aproximado de las razones trigonométricas para un ángulo determinado si se dispone de los instrumentos geométricos necesarios.



Se toma como base un círculo de radio $r = 1$ con centro O , en el origen en el plano cartesiano. Se considera un [ángulo] arbitrario medido a partir del eje x positivo y en sentido positivo; o sea, en sentido contrario a las manecillas del reloj; todo ángulo puede ser colocado (y de una sola manera) de forma tal que su vértice coincida con el origen de coordenada, uno de sus lados (llamado lado inicial) coincide con la semirrecta OA y el otro lado (llamado lado terminal) quede ubicado (a partir del inicial) en la zona de barrida en sentido contrario a la manecilla del reloj.



Orientación

La circunferencia goni métrica es el círculo centrado al origen con radios iguales a una unidad. Esto significa que la distancia desde el origen a cualquier punto en el círculo es igual a una unidad.

Primer Cuadrante

Al usar la circunferencia goni métrica, podemos definir otra unidad de medida para ángulos, denominada radianes. La medida del radián está basada en la circunferencia de la circunferencia goni métrica. La circunferencia de la circunferencia goni métrica es 2π ($2\pi r$, donde $r = 1$). Entonces un giro completo, o 360° , es igual a 2π radianes. Medio giro, o 180° es igual a π radianes.

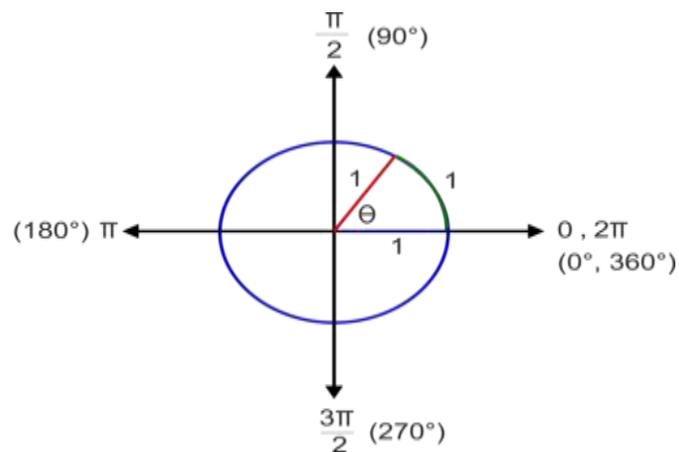


Un radián es igual a la medida de θ , la rotación requerida por la medida del arco interceptada por el ángulo para ser igual al radio del círculo.

Podemos usar la igualdad, $\pi = 180^\circ$ para convertir desde grados a radianes y viceversa.

Para convertir de grados a radianes, multiplicamos por $\frac{\pi}{180^\circ}$.

Para convertir de radianes a grados, multiplicamos por $\frac{180^\circ}{\pi}$.



Ejemplo A.

a) Convierte 250° a radianes

Solución:

Para convertir de grados a radianes multiplicamos por $\pi/180$.Entonces resulta

$$\frac{\pi}{180^\circ} \cdot 250 = \frac{250\pi}{180} = \frac{25\pi}{18}$$

b) Convierte 3π a grados

Solución:

Para convertir de radianes a grados multiplicamos por $180/\pi$.Entonces resulta:

$$\frac{180^\circ}{\pi} \cdot 3\pi = 540^\circ$$

Operaciones con Ángulos: Los grados sexagesimales se dividen en 60 minutos y cada uno de estos se subdivide a su vez en 60 segundos. Un ángulo α que mida 73 grados,15 minutos y 28 segundos se expresa de la siguiente forma:

$$\alpha = 73^\circ 15' 28''$$

Los ángulos se pueden sumar y restar cuando sea necesario teniendo en cuenta lo siguiente:

- 1) Si al sumar dos o más ángulos el número de minutos excede a 60, se toman 60 minutos y se convierten en un grado.
- 2) Si al restar un ángulo α de otro β no alcanzan los minutos de último para efectuar la operación, se toma un grado de α , se convierte en 60 y se le suma a los minutos que ya tenia

a) Ejemplo: Dados $\alpha = 75^\circ 43'$ y $\beta = 19^\circ 54'$, CALCULAR: $\alpha + \beta = ?$

$$\begin{array}{r} \alpha = 75^\circ 43' \\ \beta = 19^\circ 54' \\ \hline \end{array}$$

$\alpha + \beta = 94^\circ 97'$ Como la cantidad de minutos excede a 60, convertimos 60 de ellos a un grado, por lo tanto:

$$\alpha + \beta = 95^\circ 37'$$

b) $\alpha - \beta = ?$

$$\alpha = 74^\circ 103'$$

$$\underline{\beta = 19^\circ 54'}$$

$$\alpha - \beta = 55^\circ 49'$$

SI EL ÁNGULO ESTA EXPRESADO EN RADIANES, LAS OPERACIONES ANTERIORES NO TIENEN LA MAYOR COMPLICACIÓN.



EJEMPLO:

DADOS $\alpha = 3\pi/2$ Y $\beta = 5\pi/6$, CALCULAR :

$$\alpha + \beta = ? \quad \text{Y} \quad \alpha - \beta = ?$$

$$\alpha + \beta = 3\pi/2 + 5\pi/6$$

$$\alpha + \beta = 14\pi/6 = 7\pi/3$$

$$\alpha - \beta = ?$$

$$\alpha + \beta = ? \quad \text{Y} \quad \alpha - \beta = ?$$

$$\alpha + \beta = 3\pi/2 - 5\pi/6$$

$$\alpha + \beta = 8\pi/12 = 2\pi/3$$

1. Efectuar: $47^\circ 23' 42'' + 241^\circ 18' 6'' + 136^\circ 22' 11''$

$$\begin{array}{r} 47^\circ 23' 42'' \\ 241^\circ 8' 6'' \\ 136^\circ 22' 11'' \\ \hline 424^\circ 53' 59'' \end{array} \quad \text{Resultado: } 424^\circ 53' 59''$$

2. Efectuar: $248^\circ 41' 38'' + 121^\circ 58' 34'' + 88^\circ 46' 56''$

$$\begin{array}{r} 2^\circ 2' \\ 248^\circ 41' 38'' \\ 121^\circ 58' 34'' \\ 88^\circ 46' 56'' \\ \hline 459^\circ 147' 128'' \\ \quad \underline{-120'} \quad \underline{-120''} \\ \quad \quad 27' \quad \quad 8'' \end{array} \quad \text{Resultado: } 459^\circ 27' 8''$$

SUSTRACCIÓN DE MEDIDAS ANGULARES

EJEMPLOS:

1. Restar: $78^\circ 43' 28''$ de $119^\circ 58' 36''$

$$\begin{array}{r} 119^\circ 58' 36'' \\ - 78^\circ 43' 28'' \\ \hline 41^\circ 15' 8'' \end{array}$$

2. Efectuar: $211^\circ 36' 15'' - 198^\circ 24' 49''$

$$\begin{array}{r} 211^\circ 36' 15'' \\ - 198^\circ 24' 49'' \\ \hline 13^\circ 11' 26'' \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 35' 60'' \\ +75'' \end{array} \right\}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Convertir a **radianes**:

$$18^\circ$$

Solución:

$$18^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{18\pi}{180} = \frac{1\pi}{10} \text{ Radianes}$$

2. Convertir a radianes:

$$60^\circ$$

Solución:

$$60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{60\pi}{180} = \frac{1\pi}{3} \text{ Radianes}$$

3. Convertir a grados sexagesimales:

$$\frac{\pi}{6}$$

Solución:

$$\frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ \quad \text{simplifica } \pi$$

4. Convertir a grados sexagesimales:

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

simplifica π

5. Convertir a grados sexagesimales:

$$5\pi/6$$

$$\frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = \frac{900\pi}{6\pi} = 150^\circ$$

simplifica π

6. Convertir a radianes:

$$120^\circ$$

Solución:

$$120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{120\pi}{180} = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3} \text{ Radianes}$$

7. EFECTUAR:

$$228^\circ 31' 18'' + 101^\circ 58' 34'' + 98^\circ 16' 36''$$

Solución:

$$\begin{array}{r} 1^\circ \quad 1' \\ 228^\circ \quad 31' \quad 18'' \\ 101^\circ \quad 58' \quad 34'' \\ 98^\circ \quad 16' \quad 36'' \\ \hline 428^\circ \quad 106' \quad 88'' \\ \quad \quad \quad \underline{-60'} \quad \underline{-60''} \\ \quad \quad \quad 46' \quad 28'' \\ \hline 428^\circ 46' 28'' \end{array}$$

8. Convertir a radianes:

$$135^\circ$$

Solución:

$$135^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{135\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ Radianes}$$

9. Convertir a grados sexagesimales:

$$17\pi/60$$

$$\frac{180}{\pi} \cdot \frac{17\pi}{60} = \frac{3060\pi}{60\pi} = 51^\circ \text{ simplifica } \pi$$

10 Efectuar:

$$96^\circ 15' 18'' - 75^\circ 49' 52''$$

Solución:

$$\begin{array}{r} 74' \\ 95^\circ \quad \underline{75'} \quad \underline{78''} \\ 96^\circ \quad 15' \quad 18'' \quad \left. \vphantom{96^\circ} \right\} + 78'' \\ - 75^\circ \quad 49' \quad 52'' \\ \hline 20^\circ \quad 25' \quad 26'' \end{array}$$

Profesor :MILITZA INDABURO

Fe y Alegría Versión 2015-12-28

Otras Referencias

<http://fismate.wikispaces.com/CIRCULO+TRIGONOMETRICO>

