Adición de las Razones trigonométricas

La suma de razones trigonométricas es la adición de fracciones de ángulos

1. Seno del ángulo suma:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

2. Coseno del ángulo suma:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

3. Tangente **del** ángulo suma:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Ejemplo 1.

Sean dos ángulos, α=30º y β=60º. Las razones trigonométricas de su ángulo suma son:

- Seno del ángulo suma (30º+60º):

$$\operatorname{sen}(30^{\circ}+60^{\circ})=\operatorname{sen}30^{\circ}\cdot\cos60^{\circ}+\cos30^{\circ}\cdot\operatorname{sen}60^{\circ}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1=\operatorname{sen}90^{\circ}$$

Ejemplo 2.

Coseno del ángulo suma (30º+60º):

$$\cos(30^{\circ}+60^{\circ})=\cos30^{\circ}\cdot\cos60^{\circ}-\operatorname{sen}30^{\circ}\cdot\operatorname{sen}60^{\circ}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0=\cos90^{\circ}$$

Ejemplo 3.

Tangente del ángulo suma (30º+60º):

$$\tan(30^o + 60^o) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{1-1} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{0} = \pm\infty = \tan 90^o$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sen 105°

Solución:

Sen (A + B)= Sen A. Cos B+ Cos A. Sen B

A=60° B=45°

Sen105° =Sen (60° + 45°)
=Sen 60°.Cos45°+ Cos60°.Sen45°

$=\frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

Sen 105°=$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2. Calculo de tg 105°

Solución:

tg 105°=tg(60°+45°)= $\frac{tg60° + tg45°}{1 - tg60°.tg45°} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}.1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$

Racionalizando:

$\frac{(\sqrt{3}+1)}{(1-\sqrt{3})} . \frac{(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}+3+1+\sqrt{3}}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$ = -2-$\sqrt{3}$

tg 105°=-2-$\sqrt{3}$

3. Obtener el valor exacto de cos90°

Solución:
Cos90°=(cos(30°+60°))
=cos30°.cos60°-sen30°.sen60°
$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}$

= Cos90°=0

4. Calcular Sen 45°

Solución:
Sen45°=(sen(30°+15°))
=sen30°.cos15°+cos30°.sen15°
$=\frac{1}{2}.0{,}96+\frac{\sqrt{3}}{2}.0{,}25$
$=\frac{0{,}96}{2}+\frac{0{,}25.(1{,}73)}{2}=\frac{0{,}96}{2}+\frac{0{,}43}{2}=\frac{1{,}39}{2}$
Sen45°=0.695

5. A partir de 30° y 45° obtener el valor exacto de sen75°

Solución:
Sen75°=(sen(30°+45°))
=sen30°.cos45°+cos30°.sen45°
$=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$
$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

6. A partir de 30° y 45° obtener el valor exacto de cos75°

Solución:
cos75°=(cos(30°+45°))
=cos30°.cos45°-sen30°.sen45°
$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

7. A partir de 30° y 45° obtener el valor exacto de tan75°

Solución:
tg75°=tan(30°+45°)

tg(30°+45°)= $\frac{tg30+tg45}{1-tg30.tg45}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}.1}=\frac{\frac{\sqrt{3}+3}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}}$

Racionalizando:
$\frac{(\sqrt{3}+1)}{(3-\sqrt{3})}.\frac{(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})}=\frac{3\sqrt{3}+3+9+3\sqrt{3}}{9-3}=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=\frac{6(2+\sqrt{3})}{6}=2+\sqrt{3})$

tg75°=2+$\sqrt{3})$

8. A partir de 30° y 15° obtener el valor exacto de tan 45°

Solución:

Tg45°=tg(30°+15°)

tg(30°+15°)= $\frac{tg30+tg15}{1-tg30.tg15}$ =$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+0,26}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}.(0,26)}$ =

tg(30°+15°)= $\mathbf{\frac{0,83}{0,86} = 1}$

9. Encontrar el valor exacto de cos (105°)

Solución

cos (A + B)= cos A. cos B– sen A. senB

A=60° B=45°

Cos105° =cos (60° + 45°)

=cos 60°.cos45° – sen 60°.sen45°

$=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}$

Cos105°=$\mathbf{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

10 Encontrar el valor exacto de sen (π+12)

Solución:

Usando el hecho que π/12=π/3–π/4 y la fórmula del Seno de la diferencia de dos ángulos:

sen (π+12)= sen (π/3 +π/4)

= sen (π/3) .cos (π/4) +cos (π/3) .sen (π/4)

= (3√2). (2√ 2) + (1/2). (2/ 2)

= 12 +1/2

=25/2

sen (π+12)=25/2